Übungen zur Topologie 1 — Wintersemester 00/01

Abgabe: 29. Januar, 13:30 Uhr, Kasten 37
Übung mittwochs, 11:15 im SR 5

Aufgabe 52: Bestimme alle $n \in \mathbb{N}$, so dass jede stetige Abbildung $f\colon \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ einen Fixpunkt hat.

Tipp: die genaue Untersuchung von $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ (unter Benutzung homogener Koordinaten $(x_0 : x_1)$) sollte helfen, den ungerade dimensionalen Fall zu verstehen.

Aufgabe 53: Finde einen Raum X, so dass jede Abbildung $f\colon X \to X$ mindestens zwei Fixpunkte hat, oder zeige, dass es keinen solchen Raum geben kann.

Aufgabe 54: Seien V, W zwei K-Vektorräume. Das Tensorprodukt $V \otimes_K W$ ist (wie üblich) ein K-Vektorraum mit einer kanonischen K-bilinearen Abbildung $\phi\colon V \times W \to V \otimes_K W$ so dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: für jeden K-Vektorraum X und jede bilineare Abbildung $f\colon V \times W \to X$ gibt es genau eine K-lineare Abbildung $F\colon V \otimes_K W \to X$, so dass $f = F \circ \phi$.

Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W. Zeige, dass $(e_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von $V \otimes_K W$ ist.

Seien V und W nun endlich dimensional und $A\colon V \to V$ und $B\colon W \to W$ linear. Berechne die Spur von

$$A \otimes B\colon V \otimes_K W \to V \otimes_K W.$$

Zur Erinnerung: $f\colon V \times W \to X$ heisst bilinear, falls $f(\cdot, w)\colon V \to X$ linear ist für jedes $w \in W$, und genauso $f(v, \cdot)\colon W \to X$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 55: Seien $f\colon X \to X$ und $g\colon Y \to Y$ stetige Selbstabbildungen endlicher CW-Komplexe. Zeige für die Lefschetzzahlen

$$L(f \times g\colon X \times Y \to X \times Y) = L(f) \cdot L(g).$$

Beweise $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$.

Tipp: falls f und g zelluläre Abbildungen sind, respektiert die von $f \times G$ auf dem zellulären Kettenkomplex induzierte Abbildung die Zerlegung

$$C_n^{cell}(X \times Y) = \bigoplus_{k=0}^{n} C_k^{cell}(X) \otimes C_{n-k}^{cell}(Y).$$