(Algebraische) Topologie I

Thomas Schick*

Last compiled 15. Februar 2001; last edited Feb 15, 2000 or later

Inhaltsverzeichnis

*email: thomas.schick@math.uni-muenster.de

Hinweis: es werden möglicherweise nicht alle Punkte dieses Inhaltsverzeichnisses in Topologie I behandelt werden könnnen.

1 Grundlegende Fragestellungen und Methoden der Topologie

1.1 Äquivalenzproblem

Eine der wichtigsten Aufgaben eines Mathematikers ist es, die betrachteten Objekte unterscheiden zu können.

1.1 Beispiel. $\mathbb{R}$-Vektorräume von verschiedener Dimension sind nicht isomorph.

Beachte: die Frage ist in der Regel, ob zwei Objekte äquivalent sind im Sinnen einer natürlich gegebenen Äquivalenzrelation (z.B. Isomorphie).

Für Topologen interessant sind als Objekte z.B. (differenzierbare) Mannigfaltigkeiten, topologische Räume, Zellkomplexe, und die Relationen Diffeomorphie, Homöomorphie, Homotopie-Äquivalenz.

Topologie versucht also zunächst einmal, topologische Räume und die Beziehungen zwischen ihnen zu verstehen.

1.2 Definition. Ein *topologischer Raum* (X, τ) besteht aus einer Menge X und einer Menge τ von Teilmengen von X, den *offenen Mengen*, welche folgende Bedingungen erfüllen

(1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$

(2) Falls $U, V \in \tau$, dann auch $U \cap V \in \tau$.

(3) Sei I eine Indexmenge und $U_i \in \tau$ für alle $i \in I$. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Eine Abbildung $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ zwischen zwei topologischen Räumen heisst *stetig*, falls $f^{-1}(U) \in \tau_X$ für alle $U \in \tau_Y$, d.h. das Urbild jeder offenen Menge ist offen.

1.3 Bemerkung. Wir schreiben in der Regel X statt (X, τ) und „Raum“ anstelle von „topologischer Raum“. Oft wird „Abbildung“ für „stetige Abbildung“ verwendet, und „mengentheoretische Abbildung“ für „nicht notwendig stetige Abbildung“.

1.4 Beispiel. $\mathbb{R}^n$ ist ein topologischer Raum, falls wir setzen: $U \subset \mathbb{R}^n$ ist offen $\iff \forall x \in U\ \exists \epsilon > 0$ so dass $B_\epsilon^{circ}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) := |x - y| < \epsilon\} \subset U$.

Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ entspricht der Stetigkeitsbegriff der Infini dem hier definierten Stetigkeitsbegriff.

Auf gleiche Weise sind alle metrischen Räume topologische Räume.

1.5 Definition. (Konstruktion topologischer Räume):

(1) Sei (X, τ_X) ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge von X. Die *Teilraumtopologie* auf Y ist definiert durch $\tau_Y := \{U \cap Y \mid Y \in \tau_X\}$. Dies ist die *gröbste* Topologie auf Y (d.h. mit der kleinstmöglichen Anzahl offener Mengen), so dass die Inklusion $Y \hookrightarrow X$ stetig ist.

(2) Seien (X, τ_X) und $Y, \tau_Y)$ zwei topologische Räume. Offene Mengen der *disjunkte Summe* $X \amalg Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ in der *Summentopologie* sind genau Mengen der Gestalt $U \times \{0\} \cup V \times \{1\}$ mit $U \in \tau_X$ und $V \in \tau_Y$. Es gibt kanonische Einbettungen von X und Y in $X \amalg Y$, und die Summentopologie ist die feinste Topologie auf $X \amalg Y$ (d.h. mit so vielen offenen Mengen wie möglich) so dass beide Einbettungen stetig sind.

(3) Offene Mengen der *Produkttopologie* auf dem Produkt $X \times Y$ zweier topologischer Räume sind genau alle Vereinigungen von Mengen der Gestalt $U \times V$ mit $U \in \tau_X$ und $V \in \tau_Y$. Dies ist die gröbste Topologie auf $X \times Y$, so dass die Projektion sowohl auf X als auch auf Y stetig ist.

1.6 Definition. Zwei topologische Räume X und Y heissen *homöomorph* (wir schreiben $X \approx Y$), falls es stetige Abbildungen $: \ : X \to Y$ und $g \colon Y \to X$ gibt so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. f und g heissen *Homöomorphismen*.

1.7 Beispiel. $(a, b) \approx \mathbb{R}$, $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \approx [0, 1]^n$.

1.8 Frage. Wann gilt $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m$?

1.9 Definition. Eigenschaften topologischer Räume.

(1) (X, τ) heisst *zusammenhängend*, falls X nicht disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer offener Teilmengen ist, d.h. $U, V \in \tau$ mit $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$ impliziert $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

(2) X heisst *wegzusammenhängend*, falls zwei beliebige Punkte durch einen stetigen Weg verbunden werden können, d.h. $\forall x, y \in X \ \exists \phi : [0, 1] \xrightarrow{stetig} X$ mit $\phi(0) = x$ und $\phi(1) = y$.

(3) X heisst Hausdorff, falls zwei beliebige Punkte durch offene disjunkte Mengen getrennt werden können, d.h. $\forall x, y \in X \ \exists U_x, U_y \in \tau$ mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$.

(4) X heisst *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.

1.10 Bemerkung. Diese (und weitere) Eigenschaften sind offensichtlich unter Homöomorphie erhalten. Sie liefern also Möglichkeiten, nicht homöomorphe Räume zu unterscheiden.

1.11 Beispiel. $\mathbb{R}^0 \approx \mathbb{R}^n \implies n = 0$, $\mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^n \implies n = 1$.

Proof. $\mathbb{R}^0 = \{*\} = \{pt\}$ ist endlich, $|\mathbb{R}^n| = \infty$ falls $n > 0$.

$\mathbb{R} - \{0\}$ ist nicht zusammenhängend, aber $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathbb{R}^n - \{x\}$ ist zusammenhängend falls $n > 1$. □

Problem: Oft stimmen bei interessanten Räumen alle offensichtlichen Eigenschaften überein. Besser zur Unterscheidung von Räumen ist daher meistens die Konstruktion von *Invarianten*.

1.12 Beispiel. Die Dimension eines $\mathbb{R}$-Vektorraums.

Invarianten ordnen einer gewissen Klasse mathematischer Objekte (mehr oder weniger) wohlverstandene Grössen zu. Diese Grössen können z.B. Zahlen sein, oder eine abelsche Gruppe, oder Elemente eines bestimmten $\mathbb{Z}/2$-Vektorraums. Entscheidend für ihren Nutzen ist, dass sie berechenbar sind. Insbesondere sollte es zu Standard-Konstruktionen auch Berechnungsformeln geben.

In der Regel kommt mit einer Invariante ein Satz, der besagt, dass sie unter der betrachteten Äquivalenzrelation invariant ist (oder dass sie wohldefiniert ist).

1.13 Beispiel. Alle Basen eines gegebenen $\mathbb{R}$-Vektorraums haben die gleiche Länge.

Eins der wichtigsten Ziele der (algebraischen) Topologie ist es, Invariante zu entwickeln und zu berechnen. In der Regel muss man sich dabei auf geeignete Klassen von Räumen beschränken. Oft werden die Invarianten von algebraischer Natur sein, so dass topologische Fragestellungen in algebraische Fragestellungen übersetzt werden, die wegen grösserer "Starrheit" der algebraischen Struktur leichter beantwortet werden können. (Man kann in der Regel nicht leicht überblicken, dass zwischen zwei gegebenen Räumen kein Homöomorphismus existieren kann, aber es ist leicht, zu sehen ob es zwischen zwei Vektorräumen einen Isomorphismus geben kann.)

1.14 Beispiel. Euler-Charakteristik endlicher Polyeder.

1.15 Definition. Ein *affines k-Simplex* im $\mathbb{R}^n$ ist die *konvexe Hülle* $\sigma = (v_0, \dots, v_k) := \{\sum \lambda_i v_i \mid \sum \lambda_i = 1,\ \lambda_k \geq 0\}$ von $(k+1)$ *affin unabhängigen* Vektoren $v_0, \dots, v_k$, d.h. $(v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0)$ ist ein linear unabhängiges System von Vektoren.

Die konvexe Hülle einer Teilmenge von $\{v_0, \dots, v_k\}$ heisst *Teilsimplex* oder *Seite* von σ.

1.16 Definition. Ein (endlicher) geometrischer *Simplizialkomplex* K ist eine (endliche) Menge von affinen Simplizes im $\mathbb{R}^n$ so dass

(1) $\sigma \in K \implies$ jede Seite von σ liegt in K

(2) $\sigma_1, \sigma_2 \in K \implies \sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ oder ist ein Teilsimplex sowohl von σ_1 als auch von σ_2.

Setze $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^n$.

1.17 Beispiel. Zwei sich schneidende Strecken bilden keinen Simplizialkomplex, erst nach unterteilen. Simplizialkomplexe müssen nicht zusammenhängend sein.

1.18 Definition. Ein Raum X heisst (endliches) *Polyeder*, falls es einen (endlichen) Simplizialkomplex K gibt, so dass $X \approx |K|$. Ein solcher Homöomorphismus heisst *Triangulierung* von X.

1.19 Definition. Sei K ein endlicher Simplizialkomplex. Sei c_i die Anzahl der i-Simplizes von K. $\chi(K) := \sum(-1)^i c_i$ heisst *Eulercharakteristik* von K, $\dim K := \max\{i \in \mathbb{N} \mid c_i > 0\}$ heisst *Dimension* von K.

1.20 Definition. Sei X ein endliches Polyeder, $X \approx |K|$. Set $\chi(X) := \chi(K)$ und $\dim(X) := \dim(K)$.

1.21 Satz. *$\chi(X)$ und $\dim(X)$ sind wohldefiniert, also Homöomorphie-Invarianten endlicher Polyeder.*

1.22 Definition. Zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ heissen *homotop* (wir schreiben $f \simeq g$), wenn man sie „stetig ineinander überführen“ kann, d.h. falls es eine stetige Abbildung $h : X \times [0,1] \to Y$ gibt, so dass, falls wir

$$h_t\colon X \to Y : x \mapsto h(x,t)$$

setzen ($t \in [0,1]$) gilt: $h_0 = f$, $h_1 = g$.

$f\colon X \to Y$ heisst *Homotopieäquivalenz*, falls $g\colon Y \to X$ existiert mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Schreibe dann $X \simeq Y$, X und Y nennen wir *homotopieäquivalent*.

Falls $X \simeq \{*\}$, dann heisst X *zusammenziehbar*.

1.23 Lemma. *Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y. Wir schreiben $[X,Y]$ für die Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y.*

Es gilt: $X \simeq Y$ und $Y \simeq Z \implies X \simeq Z$.

1.24 Beispiel. $X \approx Y \implies X \simeq Y$.
$\mathbb{R}^n \simeq D^n \simeq \{*\}$. Skizzen weiterer Beispiele. „Räume bleiben homotopieäquivalent wenn man sie „aufdickt“ oder „abspeckt“.“

1.25 Satz. *Seien X und Y endliche Polyeder. Es gilt: $X \simeq Y \implies \chi(X) = \chi(Y)$.*

Frage: wie sieht es mit der Dimension aus?

1.2 Problem der Realisierung von Invarianten

Gegeben sei eine Familie F von topologischen Räumen mit gewissen „schönen“ Eigenschaften, für die insbesondere eine Invariante I definiert ist. Welche Werte $I(X)$ mit $X \in F$ werden realisiert? Man hat hier also ein *Konstruktionsaufgabe*: konstruiere $X \in F$ mit vorgegebenem $I(X)$.

1.26 Beispiel. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum, z.B. $\mathbb{R}^n$.

1.27 Definition. Ein Raum M heisst *m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit*, falls M ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie ist, der lokal zu $\mathbb{R}^m$ homöomorph ist, d.h. $\forall x \in M$ $\exists$ offene Menge $U \ni x$ und ein Homöomorphismus $\phi\colon U \to \mathbb{R}^m$. ϕ heisst *Karte* von M.

1.28 Definition. Eine *Basis B der Topologie* eines topologischen Raums X, τ ist eine Teilmenge $B \subset \tau$ so dass $\forall U \in \tau$, $x \in U$ ein $V \in B$ existiert mit $x \in V \subset U$, d.h. jede offene Teilmenge von X ist Vereinigung von Mengen aus B.

1.29 Beispiel. Die folgenden Mengen sind Mannigfaltigkeiten: $\mathbb{R}^m$, offene Teilemengen von $\mathbb{R}^m$, $S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid |x| = 1\}$.

Nulldimensionale Mannigfaltigkeiten sind genau die abzählbaren disjunkten Vereinigungen von Punkten.

Beispiele für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind der 2-Torus $T^2 = S^1 \times S^1$, $\mathbb{R}P^2$, die Kleinsche Flasche, das Möbiusband ohne Rand; Fläche F_g vom Geschlecht $g \geq 0$

1.30 Frage. Was sind die möglichen Eulercharakteristiken von zusammenhängenden kompakten 2-Mannigfaltigkeiten.

Diese Frage macht Sinn, denn

1.31 Satz. *Jede kompakte 2-Mannigfaltigkeit ist ein endliches Polyeder.*

1.32 Satz. $\chi(S^2) = 2$*,* $\chi(T^2) = 0$*,* $\chi(F_g) = 2 - 2g$*.*

1.33 Definition. (Konstruktion von topologischen Räumen: Quotiententopologie)
Sei (X, τ_X) ein topologischer Raum, $p\colon X \twoheadrightarrow B$ eine Surjektion auf eine Menge B. Definiere $\tau_B := \{U \subset B \mid p^{-1}(U) \in \tau_X\}$. Dies ist die feinste Topologie auf B so dass p stetig ist.

1.34 Beispiel. (Zusammenschlagen einer Untermenge zu einem Punkt)
Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Untermenge. Definiere $X/A := (X - A) \amalg \{*\}$ mit der offensichtlichen Projektion $X \to X/A$ (die ganz A auf $*$ abbildet). Die Topologie von X/A ist die Quotiententopologie bezüglich dieser Projektion.

Konkret: Rand der Scheibe zusammenschlagen, Sphäre einschnüren.

1.35 Definition. (Konstruktion von topologischen Räumen: Verkleben) Seien X und Y topologische Räume, $A \subset X$ ein *Teilraum* (also eine Untermenge mit der Teilraumtopologie). Sei $f\colon A \to Y$ stetig. Definiere $X \cup_f Y$, die Verklebung von X und Y entlang f, als Quotienten (mit Quotiententopologie) von $X \amalg Y$ unter der Äquivalenzrelation, die von $a \sim f(a)$ $\forall a \in A$ erzeugt wird. Man schreibt oft auch $X \cup_f Y = X \amalg Y / a \sim f(a)$. Eine andere Beschreibung ist die folgende:

$X \cup_f Y = (X - A) \amalg Y$ mit Projektion $p\colon X \amalg Y \to X \cup_f Y$ mit $p(x) = x$ $\forall x \in X - A$, $p(y) = y$ $\forall y \in Y$, $p(a) = f(a)$ falls $a \in A \subset X$.

Falls $f\colon A \to Y$ ein Homöomorphismus auf $\mathrm{im}(f)$ ist, identifiziert man A mit $f(A)$ und schreibt $X \cup_A Y$ anstelle von $X \cup_f Y$.

1.36 Beispiel. Offener Zylinder $[0,1] \times (0,1)/(0,x) \sim (1,x)$. Hier werden allerdings keine zwei Räume verklebt, sondern ein zwei Teile innerhalb eines Raums.

1.37 Definition. Sei $\mathbb{R}P^n$ die Menge der 1-dimensionalen $\mathbb{R}$-Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbb{C}P^n$ die Menge der 1-dimensionalen $\mathbb{C}$-Unterräume von $\mathbb{C}^{n+1}$. Diese Menge erhalten die Quotiententopologie bezüglich $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^n$ und $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{C}P^n$.

In der gleichen Weise definieren wir $\mathbb{H}P^n$ als die Menge $\{\mathbb{H} \cdot v \subset \mathbb{H}^{n+1} \mid 0 \neq v \in \mathbb{H}^{n+1}\}$. u

1.38 Satz. *$\mathbb{R}P^n$ ist n-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit, $\mathbb{C}P^n$ ist $2n$-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit.*

1.39 Satz. *$\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$, $\chi($Kleinsche Flasche$) = 0$, $\chi(F_g-$Kleinsche Flasche$) = 2 - 2g$ (falls $g \geq 1$), $\chi(M^2$ mit k twist-Kappen$) = \chi(M) - k$.*

1.40 Definition. F_g-Kleinsche Flasche: F_g bei dem ein (oder mehrere) twists wie bei der Kleinschen Flasche eingebaut werden.

M^2 mit twist-Kappe: nimm kleine offene Scheibe aus M^2 heraus, und verklebe gegenüberliegende (bzgl. des Mittelpunkts der entfernten Scheibe) Punkte.

1.41 Satz. *Die möglichen Euler-Charakteristiken von zusammenhängenden kompakten 2-Mannigfaltigkeiten sind $2, 1, 0, -1, \ldots$.*

1.3 Klassifikationsproblem

Die Frage des Realisierungsproblems kann man folgendermassen verschärfen: Gegeben sei wieder eine Familie F von topologischen Räumen mit “schönen” Eigenschaften: finde eine Invariante I, die Räume aus F bis auf Homöomorphie (oder eine andere betrachtete Relation) unterscheiden, d.h. $I(X) = I(Y)$ genau dann wenn $X \approx Y$, und bestimme den Wertebereich $I(X)$ für $X \in F$.

Mit anderen Worten: I stellt eine Bijektion her zwischen Homöomorphietypen von Räumen aus F und dem Wertebereich von I (der hoffentlich gut verstanden ist). In diesem Sinne ist dann F selber vollständig verstanden.

1.42 Beispiel. Die Anzahl der Punkte, i.e. Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten, stellt eine Bijektion zwischen Homöomorphietypen von nulldimensionalen Mannigfaltigkeiten und $\mathbb{N}$ her.

Die Invariante, die jeder 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit das Paar (Anzahl der kompakten Wegekomponenten, Anzahl der nichtkompakten Komponenten) zuordnet, stellt eine Bijektion zwischen 1-Mannigfaltigkeiten und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ her. Der disjunkten Vereinigung von k Kopien von S^1 und l Kopien von $\mathbb{R}$ wird das Paar (k, l) zugeordnet.

1.43 Satz. *Die Euler-Charakteristik liefert eine Bijektion der Homöomorphieklassen von zusammenhängenden kompakten orientierbaren 2-Mannigfaltigkeiten auf $\{2, 0, -2, \ldots\}$.*

Die Euler-Charakteristik liefert auch eine Bijektion der (Homöomorphieklassen von) zusammenhängenden kompakten nicht-orientierbaren 2-Mannigfaltigkeiten auf $\{1, 0, -1, -2, \ldots\}$.

1.44 Definition. Eine 2-Mannigfaltigkeit M heisst *orientierbar*, wenn es keine offene Untermenge in M gibt, die homöomorph zum offenen Möbiusband ist. Sie heisst *nicht orientierbar*, wenn eine Untermenge homöomorph zum Möbiusband existiert.

Da für kompakte Mannigfaltigkeiten Orientierbarkeit eine Homotopie-Invariante ist, kann man in Satz 1.43 "Homöomorphieklassen" durch "Homotopieklassen" ersetzen und er bleibt richtig.

Sehr oft wollen wir Räume nicht bis auf Homöomorphie, sondern bis auf Homotopieäquivalenz unterscheiden. Andererseits stellt sich die Frage nach den Beziehungen zwischen Homotopieäquivalenz und Homöomorphie: für welche Klassen von Räumen folgt aus $X \simeq Y$ bereits $X \approx Y$? Dies ist z.B. für kompakte 2-Mannigfaltigkeiten der Fall. Falls dies nicht der Fall ist: wie viele Homöomorphietypen in einer gegebenen Klasse sind homotopieäquivalent zu einem vorgegebenen Raum X (wie gross ist die *Strukturmenge* von X)?

1.45 Beispiel. Verallgemeinerte Poincaré-Vermutung
Ist jede zu S^n homotopieäquivalent kompakte Mannigfaltigkeit homöomorph zu S^n?

Diese ist wahr für $n \geq 5$ (1961 von S. Smale bewiesen) und für $n = 4$ (1982 von M. Friedmann bewiesen). Es ist offen für $n = 3$ (und eine der prominentesten offenen Fragen in der Topologie und der Mathematik allgemein). Die Aussage ist wahr für $n = 1$ und $n = 2$ (dies folgt aus obigen Klassifikationssätzen).

1.4 Einbettungsproblem

1.46 Definition. $f\colon X \to Y$ heisst *(topologische) Einbettung*, wenn $f\colon X \to f(X)$ ein Homöomorphismus ist.

In der Regel versucht man, Einbettungen in "schöne" Räume, z.B. $\mathbb{R}^n$ zu finden. Analog betrachtet man für Gruppen die Darstellungstheorie, wo man z.B. versucht, Monomorphismen von G in $Gl(n, \mathbb{R})$ oder $Gl(n, \mathbb{C})$ zu verstehen.

1.47 Beispiel. (1) Jeder metrisierbare Raum lässt sich in einen Banachraum einbetten (sogenannte Kuratovski-Einbettung).

(2) Jede glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n lässt sich in $\mathbb{R}^{2n}$ einbetten (Whitneyscher Einbettungssatz).

(3) Frage: was ist die kleinste Dimension n, so dass man eine gegebene Mannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^n$ einbetten kann? Beispielsweise lässt sich $\mathbb{R}P^2$ in $\mathbb{R}^4$, nicht aber in $\mathbb{R}^3$ einbetten.

(4) Schönfließ-Theorem: jede Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ lässt sich zu einer Einbettung $D^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ fortsetzen.

Die analoge Aussage für $n \geq 3$ ist falsch.

1.5 Problem der Fortsetzung ("Liftung") von Abbildungen

Wir haben jetzt einige Beispiele für den erfolgreichen Einsatz von Invarianten gesehen. Viele wichtige Invarianten der algebraischen Topologie sind (abelsche) Gruppen, d.h. X wird eine Gruppe $G(X)$ zugeordnet.

Die meisten solcher Zuordnungen liefern zu einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ einen Homomorphismus $G(f)\colon G(X) \to G(Y)$ (oder manchmal $G(f)\colon G(Y) \to G(X)$). In der Regel ist Ein solches G ein *Funktor*, d.h. es ausserdem

(1) $G(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{G(X)}$

(2) $G(f \circ g) = G(f) \circ G(g)$ (oder $G(f \circ g) = G(g) \circ G(f)$).

1.48 Beispiel. Es gibt den Funktor H_n (n-te Homologie), der jedem topologischen Raum eine abelsche Gruppe zuordnet. Falls $n \geq 1$ gilt: $H_n(D^{n+1}) = 0$, $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Betrachte nun folgendes *Fortsetzungsproblem*: kann man $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$ zu einer Abbildung $f\colon D^{n+1} \to S^n$ fortsetzen, d.h. gibt es f, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\mathrm{id}} & S^n \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ D^{n+1} & \xrightarrow{f} & S^n? \end{array}$$

Anwendung des Funktors H_n würde implizieren, dass folgendes Diagramm abelscher Gruppen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle H_n(i)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ 0 & \xrightarrow{H_n(f)} & \mathbb{Z}. \end{array}$$

Nun gilt $H_n(f) \circ H_n(i)(1) = H_n(f)(0) = 0 \neq 1 = \mathrm{id} \circ \mathrm{id}(1)$, d.h es gibt kein $H_n(f)$ welches das zweite Diagramm kommutativ macht, also auch kein f welches das erste Diagramm kommutativ macht.

Die “toolbox” des Topologen besteht aus möglichst vielen Funktoren, mit denen solche Probleme gelöst werden können. Diese werden in der algebraischen Topologie hergestellt (und angewandt).

1.6 Existenz von Zusatzstrukturen

Wir haben bereits gesehen, dass es für topologische Räume nützlich sein kann, Zusatzstrukturen wie z.B. eine Triangulierung zuzulassen.

1.49 Beispiel. (1) Ist X metrisierbar?
Urysohnscher Metrisierungssatz: Ein kompakter Hausdorffraum ist genau dann metrisierbar wenn er eine abzählbare Basis der Topologie hat.

(2) Welche topologischen Mannigfaltigkeiten sind glatt?

(3) Hat jede Mannigfaltigkeit der Dimension m eine Triangulierung (Hauptvermutung: ja)?
Dies ist richtig für $n = 2$ (Rado 1925) und für $n = 3$ (Morse 1952), aber für $n \geq 5$ falsch (die sogenannte Kirby-Siebenmann-Invariante $\mathrm{KS}(X) \in H^4(X, \mathbb{Z}/2)$ entscheidet darüber). Die Aussage ist ebenfalls falsch für $n = 4$: (1982: Friedmann, Quinn).

Eine andere wichtige Art von Zusatzstruktur ist die Operation einer Gruppe G auf dem Raum X (d.h. ein Homomorphismus von G in die Gruppe der Homöomorphismen von X). Interessant ist dies natürlich nur für nicht-triviale Operationen.

Neben der Existenz-Frage stellt sich natürlich auch wieder die Frage der Klassifikation, wobei diesmal natürlich nur Strukturerhaltende Homöomorphismen betrachtet werden dürfen, und der Konstruktion geeigneter Invarianten, welche die Zusatzstrukturen mit berücksichtigen.

2 Glatte Mannigfaltigkeiten

Wir haben bereits topologische Mannigfaltigkeiten kennengelernt, welche lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind. Zur Untersuchung von Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ steht (falls sie glatt), die Differentialrechnung als sehr mächtiges Werkzeug zur Verfügung. Es wäre daher wünschenswert, Differentialrechnung auch auf Mannigfaltigkeiten betreiben zu können. Dazu muss allerdings der Wechsel von einer Karte zur anderen aus differenzierbaren Abbildungen bestehen.

2.1 Definition. Ein *Atlas* $A = \{x_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^m\}$ einer Mannigfaltigkeit M^m ist eine Menge von Karten, deren Definitionsbereiche ganz M überdecken. Hier verallgemeinern wir die Definition einer Karte etwas, und lassen als Bild offene Teilmengen V_α von $\mathbb{R}^m$ zu.

Solch ein Atlas heisst *differenzierbar*, falls jeder *Kartenwechsel*

$$x_\alpha x_\beta^{-1} \colon x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^m \to x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^m$$

a eine differenzierbare Abbildung zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist.

Eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit* ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einem differenzierbaren Atlas.

Eine stetige Abbildung $f \colon M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heisst *glatt*, falls $y \circ f \circ x^{-1}$ glatt ist für jede Karte x des differenzierbaren Atlas von M und jede Karte y des Atlas von N (wobei der Definitionsbereich von x^{-1} geeignet eingeschränkt werden muss). Die Menge der glatten Abbildungen wird mit $C^\infty(M, N)$ bezeichnet.

Ein Homöomorphismus $f \colon M \to N$ zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist ein Diffeomorphismus, wenn sowohl f als auch f^{-1} differenzierbar sind.

Wir sagen, dass zwei Atlanten auf einer Mannigfaltigkeit M dieselbe differenzierbare Struktur induzieren, falls id_M ein Diffeomorphismus der beiden erhaltenen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M ist. Dann ist die Vereinigung dieser beiden Atlanten wieder ein differenzierbarer Atlas. Vereinigt man alle Atlanten, die dieselbe differenzierbare Struktur induzieren, erhält man den sogenannten *maximalen* Atlas dieser differenzierbaren Struktur.

Für uns bedeutet *differenzierbar* immer C^∞-differenzierbar. Man kann analoge Begriffe auch mit C^r definieren, dies wird z.B. in der Differentialtopologie intensiver untersucht.

2.2 Beispiel. $\mathbb{R}^n$ ist glatte Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{\mathrm{id} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$. Insbesondere gibt es für jede glatte Mannigfaltigkeit $C^\infty(M, \mathbb{R})$, eine gewisse Teilmenge von $C(M, \mathbb{R})$.

2.3 Beispiel. S^n, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, kompakte Flächen, offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten (wobei wir natürlich noch die Atlanten angeben müssen).

Andererseits gibt es topologische Mannigfaltigkeiten, die keinen differenzierbaren Atlas haben. Die erste solche Mannigfaltigkeit wurde 1960 von Kervaire angegeben.

Die beiden differenzierbaren Strukturen auf $\mathbb{R}$ gegeben durch $A_1 = \{\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ und $A_2 = \{\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3\}$ liefern nicht die gleiche differenzierbare Struktur (die Inverse von $x \mapsto x^3$ ist nicht differenzierbar). Allerdings ist die Abbildung $(\mathbb{R}, A_2) \to (\mathbb{R}, A_1)\colon x \mapsto x^3$ ein Diffeomorphismus.

Es gibt kompakte Mannigfaltigkeiten M mit zwei verschiedenen differenzierbaren Atlanten A_1 und A_2, so dass es keinen Diffeomorphismus zwischen (M, A_1) und (M, A_2) gibt (erstes Beispiel: Milnor 1956 mit $M = S^7$). Dann spricht man davon, dass M *exotische differenzierbare Strukturen* besitzt.

Proof. Wir wollen als Beispiel andeuten, wie man die glatte Struktur auf $\mathbb{C}P^n$ definiert. Durch jedes von Null verschieden Tupel $(z_0, \dots, z_n)$ geht genau ein komplex-1-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{C}^{n+1}$, wird also ein eindeutiger Punkt $(z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{C}P^n$ definiert. Hier spricht man von *homogenen Koordinaten*, beachte dass $(z_0 : \dots : z_n) = (\lambda z_0 : \cdots \lambda z_n)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Wir definieren nun folgenden Atlas: für $i = 0, \dots, n$ sei $U_i := \{(z_0 : \dots : z_n) \mid z_i = ne0\}$. Setze

$$x_i\colon U_i \to \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}\colon (z_0 : \dots : z_n) \mapsto \frac{1}{z_i}(z_0, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n),$$

wobei die Schreibweise bedeutet, dass die i-te Koordinate weggelassen wird. Beachte, dass sowohl die Definition von U_i als auch von x_i nicht von den Repräsentanten der Punkte abhängt. Es ist leicht zu sehen, dass $x_i\colon U_i \to \mathbb{R}^{2n}$ bijektiv ist.Sei $p\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$ die kanonische Projektion, die die Topologie auf $\mathbb{C}P^n$ festlegt. Nebenbei: Da die Einschränkung von p auf die Sphäre S^{2n+1} ebenfalls surjektiv ist, ist $\mathbb{C}P^n$ als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt. Um zu zeigen, dass x_i stetig ist, muss man zeigen, dass $x_i \circ p\colon p^{-1}(U_i) \to \mathbb{C}^n$ stetig ist. Dies folgt unmittelbar aus der Formel $(z_0, \dots, z_n) \mapsto (z_0/z_i, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n/z_i)$. Um zu zeigen, dass die Umkehrung stetig ist, definiere die stetige Abbildung

$$y_0\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n+1}\colon (z_1, \dots, z_n) \mapsto (1, z_1, \dots, z_n).$$

$x_0 = p \circ y_0$ ist als Verkettung stetiger Abbildungen stetig. (Für x_i geht's natürlich genauso). Den Beweis der Hausdorff-Eigenschaft und des zweiten Abzählbarkeitsaxioms wollen wir nicht ausführen.

Die Formel für den Kartenwechsel $x_n x_0^{-1}$ ist

$$x_n x_0^{-1}\colon (z_1, \dots, z_n) \overset{x_i^{-1}}{\mapsto} (1 : z_1 : \dots : z_n) \overset{x_n}{\mapsto} (1/z_n, z_1/z_n, \dots, z_{n-1}/z_n).$$

Dies ist offenbar (auf ihrem Definitionsbereich) eine glatte Abbildung. Dasselbe gilt mit gleichem Beweis für $x_i x_j^{-1}$. Wir haben also einen glatten Atlas definiert. Man sieht auch sofort, dass p eine glatte Abbildung ist. □

2.4 Bemerkung. Wenn wir im folgenden von einer Mannigfaltigkeit sprechen, soll damit immer eine glatte Mannigfaltigkeit mit fest vorgegebenem (maximalem) Atlas gemeint sein. Karten sind immer Karten aus diesem Atlas. Eine nicht-notwendig glatte Mannigfaltigkeit wird zur Unterscheidung *topologische Mannigfaltigkeit* genannt.

2.5 Definition. Sei $f\colon M^m \to N^n$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, $p \in M$. Definiere den Rang von f in p, $rg_p(f)$ als den Rang der Jakobi-Matrix $D := D_p(y \circ f \circ x^{-1})$, wobei x eine Karte von M um p und y eine Karte von n um $f(p)$ ist. Beachte, dass D eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ ist.

Wegen der Kettenregel ist diese Zahl nicht abhängig von den gewählten Karten.

2.6 Definition. Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Ein Punkt $p \in M$ heisst *regulärer Punkt* von f, falls $rg_p(f) = \dim(N)$. $q \in N$ heisst *regulärer Wert* von f, wenn jeder Punkt im Urbild $f^{-1}(q)$ ein regulärer Punkt von f ist. Beachte, dass dies insbesondere dann der Fall ist, wenn q nicht im Bild von f liegt.

2.7 Definition. Eine Teilmenge $M \subset N$ einer glatten n-Mannigfaltigkeit N heisst glatte *Untermannigfaltigkeit* der Dimension $m \le n$, falls für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte $x_p\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ von N existiert, so dass $p \in U$ und $x_p(M \cap U) = V \cap \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. $n - m$ heisst die *Kodimension* der Untermannigfaltigkeit M in N.

2.8 Bemerkung. Insbesondere erhält man durch Einschränken dieser Untermannigfaltigkeitskarten einen Atlas von M, so dass M selbst eine glatte m-Mannigfaltigkeit ist.

2.9 Satz. *Sei $f\colon M \to N$ glatt und $q \in N$ ein regulärer Wert von f. Dann ist $f^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit von M.*

Proof. Wir müssen für jeden Punkt p im Urbild von q geeignete Untermannigfaltigkeitskarten konstruieren. Seien dazu zunächst $x\colon U \to x(U)$ und $z\colon V \to y(V)$ Karten von M und N um p und q, mit $x(p) = 0$ und $y(q) = 0$. Indem wir x mit einer Rotation von $\mathbb{R}^m$ verknüpfen, falls nötig, können wir annehmen, dass $\ker(D_0(yfx^{-1})) = \mathbb{R}^{m-n} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ (beachte, dass der Rang dieser linearen Abbildung nach Voraussetzung n ist).

Wir würden jetzt gerne die Karte x mit einem Diffeomorphismus $\zeta\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ komponieren(der richtiger auf geeigneten kleinen Umgebungen von 0 definiert ist), so dass $\zeta \circ x$ die gewünschte Untermannigfaltigkeitskarte ist. Wir definieren $\zeta(v, w) := (v, yfx^{-1}(v, w))$ mit $v \in \mathbb{R}^{m-n}$, $w \in \mathbb{R}^n$. Beachte, dass $\zeta \circ x(a) = (\cdot, 0)$ genau wenn $yf(a) = 0$, also $f(a) = q$, wie gewünscht. Wir müssen natürlich noch zeigen, dass ζ wirklich (in einer Umgebung von 0) ein Diffeomorphismus ist. Dies folgt mit dem Satz von der Inversen Funktion (oder dem impliziten Funktionen-Satz) aus Infini, wenn wir zeigen können, dass das Differential von ζ an 0 injektiv (und folglich bijektiv) ist. Nun gilt einerseit $\ker D_0\zeta \subset \ker D_0(yfx^{-1}) = \mathbb{R}^{m-n} \times \{0\}$ (zu sehen, indem wir ζ mit der Projektion auf $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ komponieren, wir erhalten dann einfach yfx^{-1}), andererseits $\ker(D_0\zeta) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n$ (indem wir ζ mit der Projektion auf $\mathbb{R}^{m-n} \times \{0\}$ komponieren, was gerade diese Projektion ist). Insgesamt ist der Kern also wirklich $\{0\}$.

Der Satz von der Inversen Funktion sagt nun, dass die Einschränkung von ζ auf genügend kleine offene Umgebungen von 0 ein Diffeomorphismus ist. Entsprechend ist $\zeta \circ x$ (mit entsprechend eingeschränktem Definitionsbereich) eine glatte Karte von M, wir haben bereits überprüft, dass es sich um eine Untermannigfaltigkeitskarte für $f^{-1}(q)$ handelt. $\square$

2.10 Beispiel. Es folgt, dass S^n eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Setze $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x|^2$. Dann ist $S^n = f^{-1}(1)$. Es ist leicht zu sehen, dass 1 regulärer Wert ist.

Ein interessanteres Beispiel ist die Gruppe der orthogonalen Transformationen $O(n)$. Hier betrachten wir die Menge $Gl(n, \mathbb{R})$ aller invertierbarer $n \times n$-Matrizen. Dies ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ und damit eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir betrachten nun die Abbildung $f(A) = AA^*$. Dann ist $O(n)$ das Urbild von 1. $\operatorname{im}(f) \subset S(n, \mathbb{R})$, wobei $S(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ die Menge der symmetrischen Matrizen ist (also insbesondere eine Mannigfaltigkeit). Die Einträge von f sind Polynome, also ist f eine glatte Abbildung. Fasst man $D_A f$ als lineare Abbildung vom Vektorraum der Matrizen zu sich selbst auf, gilt $D_A f(B) = BA^* + AB^*$, denn

$$f(A + H) = (A + H)(A + H)^* = f(A) + D_A f(H) + HH^*,$$

und $\lim_{\|H\| \to 0} HH^* / \|H\| = 0$.

Wir müssen nur noch zeigen, dass $D_A f$ surjektiv auf $S(n, \mathbb{R})$ ist, falls $A \in O(n)$. Aber für $C \in S(n, \mathbb{R})$ und $A \in O(n)$ gilt

$$C = \frac{1}{2} C \underbrace{AA^*}_{=\mathrm{id}} + \frac{1}{2} AA^* \underbrace{C^*}_{=C} = D_A f(\frac{1}{2} CA).$$

Also ist $O(n)$ Untermannigfaltigkeit, der Dimension $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.

Beachte noch, dass die Multiplikation $O(n) \times O(n) \to O(n)$ als Einschränkung einer glatten Abbildung definiert auf allen Matrizen, selbst glatt ist.

2.11 Definition. Eine *Lie-Gruppe* G ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur derart, dass die Multiplikation $G \times G \to G$ glatt ist. (Die Abbildung $g \mapsto g^{-1}$ ist dann automatisch glatt).

Dieser Begriff ist wichtig wegen des folgenden Existenzsatzes.

2.12 Theorem. ***(Satz von Sard):***
Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Dann ist die Menge der regulären Werte von f eine dichte Teilmenge von N (insbesondere nicht leer).

2.13 Bemerkung. Der Satz von Sard kann folgendermassen verschärft werden: die Menge der singulären Werte von f ist eine Nullmenge in N.

2.14 Korollar. *Seien M^m und N^n glatte Mannigfaltigkeiten,* $\dim(M) = m < n = \dim(N)$. *Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Dann ist $N - f(M)$ dicht in N, insbesondere nicht leer, d.h. f ist nicht surjektiv.*

Proof. Nach dem Satz von Sard ist die Menge der regulären Werte dicht in M. Aber für $p \in M$ ist $rg_p(f) = rg(D_f(p)(yfx^{-1})) \leq m < n$, da $D_{f(p)}(yfx^{-1})$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ ist. Also ist kein $p \in M$ regulärer Punkt, d.h. $q \in N$ kann nur dann regulärer Wert sein, wenn sein Urbild $f^{-1}(q)$ leer ist. □

2.15 Definition. Eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ heisst *Submersion*, falls $rg_p(f) = \dim(N)$ für jedes $p \in M$.

f heisst *Immersion*, falls $rg_p(f) = \dim(M)$ für jedes $p \in M$.

Eine Immersion f, so dass $f\colon M \to f(M)$ ein Homöomorphismus ist (wobei $f(M)$ die Teilraumtopologie erhält), wird *glatte Einbettung* genannt. Das Bild ist dann automatisch eine glatte Untermannigfaltigkeit, und $f\colon M \to f(M)$ ein Diffeomorphismus.

2.16 Bemerkung. Für die letzte Aussage muss man natürlich noch die UntermannigfaltigkeitsKarten konstruieren. Dies wird in ähnlicher Weise wie der vorherige Beweis durchgeführt, und wieder auf den Satz von der inversen Funktion zurückgeführt.

2.17 Definition. Eine (glatte) m-Mannigfaltigkeit M^m *mit Rand* wird genauso definiert wie eine (glatte) m-Mannigfaltigkeit, nur dass die Karten nicht auf $\mathbb{R}^m$, sondern auf offene Teilmengen von $\mathbb{R}^m_{\geq 0} := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \geq 0\}$ gehen sollen.

Hierbei ist wichtig, dass für eine beliebige Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^m$ eine Abbildung $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ per Definition genau dann glatt ist, wenn es eine offene Umgebung U von A und eine glatte Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $F|_A = f$.

Der *Rand* von ∂M von M besteht aus allen Punkten, die von einer der Karten auf $\{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = 0\}$ abgebildet wird.

2.18 Satz. *Falls M eine m-Mannigfaltigkeit mit Rand ist, ist ∂M eine $(m-1)$-Mannigfaltigkeit. Ein Punkt aus ∂M wird von* jeder *Karte auf* $\{(0, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m\}$ *abgebildet.*

Proof. Diese wenig überraschende Tatsache werden wir erst später beweisen. □

3 Tangentialraum

3.1 Definition mittels Karten

Die wichtigste Eigenschaft glatter Funktionen in der Infinitesimalrechnung ist, dass man sie ableiten kann. Ableiten heisst, die Funktion an einem Punkt durch eine lineare Abbildung zu approximieren.

Wir wollen dies auch für glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten durchführen. Die erste Frage, die wir dafür klären müssen, ist, was denn die richtige Vektorräume sind: wir brauchen nicht nur lineare Approximationen von glatten Abbildungen, sondern auch lineare Approximationen der Mannigfaltigkeiten.

3.1 Beispiel. wir betrachten die Mannigfaltigkeit S^n, eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$. Die beste lineare Approximation an S^n am Punkt $x \in S^n$ sind alle Tangentialvektoren $T_xS^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v \perp x\}$ (für die Anschauung müssen wir diesen Vektorraum affin verschieben, so dass er durch x hindurchgeht).

Diese Menge von Tangentialräumen der einzelnen Punkte kann man zusammenfassen zu einem topologischen Raum $TS^n := \{(x, v) \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp v\}$ mit der Teilraumtopologie. TS^n wird das Tangentialbündel von S^n genannt.

Für Mannigfaltigkeiten, die abstrakt gegeben sind (mittels eines glatten Atlas), muss auch das Tangentialbündel abstrakt definiert werden. Dafür gibt es verschiedene äquivalente Möglichkeiten, von denen wir drei (zwei ausführlicher) kennenlernen werden.

Für $\mathbb{R}^n$ oder offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist der Tangentialraum an einen Punkt gerade selbst wieder $\mathbb{R}^n$. Zum einen ist das der Definitionsbereich des Differential einer glatten Abbildung, und auch das Beispiel der S^n zeigt, dass für offene Untermannigfaltigkeiten der tangentiale Raum aus allen Vektoren des $\mathbb{R}^n$ besteht.

Wenn eine Mannigfaltigkeit M mit $p \in M$ und Karte $x \colon U \to V \subset \mathbb{R}^m$ ($p \in U$) gegeben ist, würden wir entsprechend gerne sagen, dass vermittels dieser Karte der Tangentialraum an M durch p mit $\mathbb{R}^n$, dem Tangentialraum an V durch $x(p)$, identifiziert wird. Aber natürlich darf solch eine Definition nicht von der Wahl einer Karte abhängen. Ein Ausweg ist, *alle* Karten zu berücksichtigen, und eine geeignete Äquivalenzrelation einzuführen.

3.2 Definition. Ein *Tangentialvektor* an eine glatte m-Mannigfaltigkeit M ist eine Äquivalenzklasse von Tripels $(p, x_i, v) \in M \times \Lambda \times \mathbb{R}^n$, wobei Λ der maximale Atlas von M ist und wir verlangen dass p im Definitionsbereich der Karte x_i liegt. Die Äquivalenzrelation ist wie folgt gegeben:

$$(p, x_i, v) \sim (q, x_j, w) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = q \text{ und } D_{x_i(p)}(x_j x_i^{-1})v = w.$$

In Worten: die Ableitung des Kartenwechsels (zwischen x_i und x_j) an der Stelle $x_i(p)$ bildet v auf w ab.

3.3 Bemerkung. Die Kettenregel und die Regel für Ableitung von inversen Abbildungen impliziert, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Sei zum Beispiel $(p_1, x_1, v_1) \sim (p_2, x_2, v_2)$ und $(p_2, x_2, v_2) \sim (p_3, x_3, v_3)$. Wir müssen zeigen, dass $(p_1, x_1, v_1) \sim (p_3, x_3, v_3)$. Es gilt $p_1 = p_2 = p_3$. Ausserdem

$$\begin{aligned} D_{x_1(p_1)}(x_3 x_1^{-1})v_1 &= D_{x_1(p_1)}(x_3 x_2^{-1} x_2 x_1^{-1})v_1 \\ &= D_{x_2 x_1^{-1}(x_1(p_1))}(x_3 x_2^{-1}) \circ D_{x_1(p)}(x_2 x_1^{-1})v_1 = D_{x_2(p-1)} x_3 x_2^{-1} v_2 = v_3, \end{aligned}$$

was noch zu zeigen war.

3.4 Definition. Das *Tangentialbündel* TM ist die Menge aller Tangentialvektoren. Die Abbildung $\pi \colon TM \to M \colon [p, x, v] \mapsto p$ ist wohldefiniert. Der *Tangentialraum* T_pM an $p \in M$ ist das Urbild $\pi^{-1}(p)$, also die Menge aller Klassen $[p, x, v]$ von Tangentialvektoren.

3.5 Bemerkung. Falls $U \subset M$ eine offene Teilmenge ist, ist TU in kanonischer Weise eine Teilmenge von TM.

Wir wollen nun auf TM die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit definieren, und auf T_pM (für jedes $p \in M$) die Struktur eines m-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums.

Sei $x\colon U \to V$ eine Karte von M. Diese induziert eine bijektive Abbildung

$$Tx\colon TU \to V \times \mathbb{R}^m\colon [p,x,v] \mapsto (x(p),v).$$

"Einschränkung" auf $T_pU = T_pM$ für $p \in U \subset M$ liefert die Bijektion

$$T_px\colon T_pM \to \mathbb{R}^m\colon [p,x,v] \mapsto v.$$

3.6 Definition. Mittels dieser Bijektion definieren wir eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf T_pM.

3.7 Bemerkung. Diese hängt nicht von der Karte x ab. Falls $x'\colon U' \to V'$ eine andere Karte mit $p \in U'$, dann ist $T_px' \circ (T_px)^{-1} = D_{x(p)}(x'x^{-1})$ ein linearer Isomorphismus von $\mathbb{R}^m$ (hier verwenden wir, dass nach Definition der Äquivalenzrelation $[p,x,v] = [p,x',D_{x(p)}(x'x^{-1})v]$).

Es bleibt jetzt noch, eine Topologie auf TM zu definieren, und dann einen glatten Atlas anzugeben. Unser Ziel ist, dass für eine Karte $x\colon U \to V$ von M die Abbildung $Tx\colon TU \to V \times \mathbb{R}^m$ eine Karte von TM ist. Zunächst definieren wir die Topologie τ_{TM} so, dass eine Teilmenge $B \subset TM$ genau dann offen ist, wenn $x(B \cap TU)$ eine offene Teilmenge von $V \times \mathbb{R}^m$ ist für jede Karte $x\colon U \to V$ von M. Es folgt sofort, dass dies eine Topologie auf TM liefert, in der insbesondere alle Mengen TU (mit $U \subset M$ offen) offene Mengen sind.

Die Definition eines glatten Atlas impliziert, dass für zwei Karten $x\colon U \to V$ und $x'\colon U' \to V'$ der "Kartenwechsel"

$$Tx' \circ (Tx)^{-1}\colon x'(U \cap U') \times \mathbb{R}^m \to x(U \cap U') \times \mathbb{R}\colon (q,v) \mapsto (x' \circ x^{-1}(q), D_q(x'x^{-1})v)$$

ein Diffeomorphismus, insbesondere ein Homöomorphismus. Es folgt, dass

$$Tx\colon TU \to V \times \mathbb{R}^m$$

ein Homöomorphismus ist. TM ist Hausdorff, denn $[p,x,v]$ und $[q,y,w]$ für $p \neq q$ können durch geeignete TU und TV mit $U,V \subset M$ offen getrennt werden, da M Hausdorff ist. Falls $p = q$ können wir einen geeigneten Homöomorphismus Tx betrachten, um einzusehen, dass $[p,x,v] \neq [p,y,w]$ durch disjunkte offene Mengen getrennt werden können. TM hat eine abzählbare Basis der Topologie, gegeben durch die Vereinigung $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$, wobei $x_i\colon U_i \to V_i$, $i \in \mathbb{N}$ Karten sind so dass $\{U_i\}$ eine Basis der Topologie von M bildet, und B_i eine abzählbare Basis der Topologie der Mannigfaltigkeit TU_i

Also ist TM eine Mannigfaltigkeit, und obige Überlegungen zeigen, dass der Atlas $\{Tx \mid x \text{ Karte von } M\}$ TM zu einer glatten Mannigfaltigkeit macht. Beachte auch, dass $\pi\colon TM \to M$ eine glatte Abbildung ist.

3.8 Definition. Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten. Definiere $Tf\colon TM \to TN$ durch

$$Tf[p,x,v] := [f(p), y, D_{x(p)}(yfx^{-1})v],$$

wobei $x\colon U \to x(U)$ Karte von M (mit $p \in M$), $y\colon U' \to y(U')$ Karte von N (mit $f(U) \subset U'$).

Sei $p \in M$. Die Einschränkung $T_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ ist das *Differential von f an der Stelle p*. Die Formel zeigt, dass das eine lineare Abbildung ist, die gesuchte lineare Approximation von f an der Stelle p.

3.9 Bemerkung. Wie vorher folgt aus der Kettenregel, dass Tf wohldefiniert ist. Die Formeln zeigen, dass $Tf\colon TM \to TN$ eine glatte Abbildung ist.

Die Definition impliziert sofort das $T\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{TX}$, sowie $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$. Wir haben also einen Funktor konstruiert, der glatten Mannigfaltigkeiten und glatten Abbildungen andere glatte Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen zuordnet.

3.10 Definition. Eine Abbildung $X\colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ (die also jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor an p zuordnet) heisst *Schnitt* des Tangentialbündels oder auch *Vektorfeld* auf M. Wir unterscheiden *stetige Vektorfelder*, *glatte Vektorfelder*, ...

3.11 Bemerkung. Diese Definition von TM funktioniert für Mannigfaltigkeiten mit Rand, wobei zu beachten ist, dass alle Abbildungen immer glatt bis zum Rand sind. Erinnerung: $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ mit $X \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige Menge heisst glatt, wenn es eine offene Umgebung U von X in $\mathbb{R}^n$ gibt, und eine Fortseztung F von f auf U (also $F|_X = f$), die glatt ist.

3.2 Anwendung: Invarianz der glatten Dimension

Wir können jetzt wenigstens unsere Frage, ob die Dimension einer Mannigfaltigkeit wohlbestimmt ist, für differenzierbare Mannigfaltigkeiten beantworten.

3.12 Satz. *Sei $f\colon M^m \to N^n$ ein Diffeomorphismus mit Inverse $g\colon N \to M$. Dann ist $T_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ ein linearer Isomorphismus für jeden Punkt $p \in M$. Insbesondere folgt $m = \dim(T_pM) = \dim(T_{f(p)N}) = n$.*

Proof. Die Funktoreigenschaft impliziert $T_pf \circ T_{f(p)}g = T_{f(p)}\,\mathrm{id} = \mathrm{id}_{T_{f(p)}N}$ und $T_{f(p)}g \circ T_pf = \mathrm{id}_{T_pM}$. □

3.3 Definition mittels (Klassen von) Wegen

3.13 Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Jeder Weg $\phi\colon (-1,1) \to M$ mit $\phi(0) = p$ definiert einen Tangentialvektor $\phi'(0) := T_0\phi(1) \in T_p(M)$. Zwei solche Wege ϕ und ψ heissen äquivalent, wenn $\phi'(0) = \psi'(0) \in T_pM$. Dies ist äquivalent dazu, dass $D_0(x\phi) = D_0(x\psi)$ für eine (und damit jede) Karte $x\colon U \to x(U)$ von M mit $p \in U$ (damit wird Äquivalenz von Wegen also definiert, ohne dass T_pM bereits definiert wäre). Durch Verwendung von Karten sieht man sofort, dass zu jedem $v \in T_pM$ ein Weg ϕ_v existiert mit $\phi_v'(0) = v$. Es folgt, dass T_pM auch aufgefasst werden kann als die Menge der Äquivalenzklassen von Wegen durch p.

Falls $f\colon M \to N$ glatt ist, wird Tf durch Komposition der Wege mit f definiert, d.h. $T_pf([\phi]) = [f \circ \phi]$ falls $\phi\colon (-1,1) \to M$ ein Weg mit $\phi(0) = p$. Dann ist $f \circ \phi$ ein Weg durch $f(p)$.

Diese Definition ist für die Anschauung nützlich, hat aus theoretischen Gründen jedoch Nachteile. Es ist z.B. nicht klar, wie man T_pM auf diese Weise die $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur geben kann.

3.14 Bemerkung. Für Mannigfaltigkeiten mit Rand muss man statt Wegen von $(-1,1)$ nach M auch Wege $[0,1) \to M$ und $(-1,0] \to M$ betrachten, wobei 0 dann immer auf einen Randpunkt abgebildet werden soll.

3.4 Definition mittels Derivationen

Der Tangentialraum wird definiert, um die Ableitung von glatten Abbildungen definieren zu können. Es ist allerdings auch möglich, und wichtig, Tangentialvektoren selbst als Ableitungsoperatoren aufzufassen. Als Beispiel schauen wir uns zunächst wieder den $\mathbb{R}^m$ an. Die Ableitung an Null einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch die Zeilenmatrix $(\partial_1 f(0), \dots, \partial_m f(0))$, wobei wir ∂_i anstelle von ∂/∂_i schreiben.

Wir haben also Tangentialvektoren ∂_i, denen die lineare Abbildung $D_0 f$ den 1-dimensionalen Vektor $\partial_i f(0)$ zuordnet. Beachte, dass die ∂_i einen Vektorraum von Differntialoperatoren aufspannen. Wir erhalten einen Isomorphismus zu $\mathbb{R}^m$, indem wir jedem Vektor $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$ den Operator $\partial_v := \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial_i$ zuordnen. Beachte, dass es für jedes $v \neq 0$ eine (sogar lineare) Abbildung f_v gibt mit $\partial_v f_v(0) \neq 0$.

Abstrakt müssen wir uns überlegen, was die Essenz der Operatoren ∂_i ist.

3.15 Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Derivation*

$$\partial\colon C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

am Punkt $p \in X$ ist eine lineare Abbildung, die zusätzlich die Eigenschaft

$$\partial(fg) = \partial(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial(g)$$

erfüllt.

3.16 Beispiel. Die oben eingeführten Richtungsableitung ∂_i sind Derivationen bei $p = 0$.

3.17 Lemma. *Sei ∂ eine Derivation, f eine konstante Funktion. Dann gilt $\partial(f) = 0$.*

Proof. Wegen Linearität reicht es zu zeigen, dass $\partial(1) = 0$. Es gilt $\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) = \partial(1) \cdot 1 + 1 \cdot \partial(1)$, und die Behauptung folgt. □

3.18 Satz. *Der Tangentialraum T_pM kann mit dem Vektorraum der Derivationen am Punkt $p \in M$ identifiziert werden. Diese Identifizierung geschieht folgendermassen: einem Tangentialvektor $[p,x,v]$ wird die Derivation $\partial_{[p,x,v]}\colon f \mapsto \partial_v(f \circ x^{-1})(x(p))$ zugeordnet.*

Proof. Die Kettenregel zeigt (wieder einmal) dass die Zuordnung wohldefiniert ist. Sie ist offenbar linear und injektiv (wir können die Funktionen f_v von oben verwenden, indem wir sie einschränken und dann geeignet auf ganz M fortsetzen). Um Surjektivität zu zeigen, benötigen wir folgende *Taylor-Entwicklung.*

3.19 Lemma. *Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, $x\colon U \to V$ eine Karte von M (mit $x(p) = 0$ und mit Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_m$). Dann gibt es glatte Funktionen $f_1, \dots, f_m\colon U \to \mathbb{R}$ so dass*

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{m} x_i(q) f_i(q) \qquad \forall q \in U' \subset U.$$

Proof. Definiere $F := f \circ x^{-1}\colon B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}$ ($\epsilon > 0$ so dass $B_\epsilon(0) \subset V$), $U' := x^{-1}(B_\epsilon(0))$. Sei $q \in U'$ fest setze $v := x(q)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) = F(v) - F(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(tv)|_{t=s}\, ds \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} \partial_i F(sv) v_i \, ds = \sum_{i=1}^{m} v_i k \underbrace{\int_0^1 F(sv)\, ds}_{=: f_i(q)} . \end{aligned}$$

□

Sei ∂ nun eine beliebige Derivation an p. Wir zeigen jetzt

$$\partial = \partial_{[p, x, \sum_{i=1}^{m} \partial(x_i) e_i]},$$

also ist die Zuordnung auch surjektiv. Um die letzte Identität zu zeigen, schreibe mittels Taylor-Entwicklung $f(q) = f(p) + \sum x_i(q) f_i(q)$. Derivationen von konstanten Funktionen sind Null. Damit erhält man

$$\partial(f) = \sum_j \partial(x_j) f_j(p) + x_j(p) \partial(f_j) = \sum \partial(x_j) f_j(p)$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} &\partial_{[p,x,\sum \partial(x_i) e_i]}(f) \\ &= \sum_j \sum_i (\partial(x_i)) \left(\underbrace{\partial_i (x_j \circ x^{-1})(0)}_{\delta_{ij}} \cdot \underbrace{(f_j \circ x^{-1})(0)}_{= f_j(p)} + \underbrace{(x_j \circ x^{-1})(0)}_{=0} \cdot \partial_i f_j \circ x^{-1}(0) \right) \\ &= \sum_j \partial(x_j) f_j(p). \end{aligned}$$

□

Die Derivationen einer Funktion f am Punkt p hängen nur davon ab, wie die Funktion auf einer beliebig kleinen Umgebung von p aussieht. In mathematischem Chinesisch: sie hängen nur vom Keim von f bei p ab.

3.20 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $x \in X$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen $f\colon U \to Y$, wobei U eine offene Teilmenge von X ist, die x enthält. Zwei stetige Abbildungen $f\colon U \to Y$ und $g\colon V \to Y$ sind äquivalent, falls eine offene Menge $W \subset U \cap V$ mit $x \in W$ existiert, so dass $f|_W = g|_W$. Die Äquivalenzklasse einer solchen Funktion f heisst der *Keim* von f in x. Die Menge dieser Keime wird mit $O_x(X, Y)$ bezeichnet.

Um zu sehen, dass Derivationen wirklich nur vom Funktionskeim abhängen, benötigen wir *Abschneidefunktionen.* Eine sehr nützliche Konstruktion, die immer wieder gebraucht wird.

3.21 Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ kompakt und $U \supset K$ offen. Dann gibt es eine glatte Funktion $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) = 1$ falls $x \in K$, $\phi(x) = 0$ falls $x \notin U$, und $0 \leq \phi(x) \leq 1$ für alle $x \in M$.*

Proof. Wir erinnern zuerst, dass es glatte Funktionen $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $\alpha(x) = 1$ für $x \leq 0$, $\alpha(x) = 0$ für $x \geq 1$ und $0 \leq \alpha(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $p \in K$ definieren wir nun eine glatte Funktion $f_p\colon M \to [0,1]$ mit $f_p(p) = 1$ und $f_p|_{M-U} = 0$. Dazu sei $x\colon V \to x(V)$ eine Karte mit $p \in V \subset U$ und $x(p) = 0$, und $B_\epsilon(0) \subset x(V)$ für $\epsilon > 0$. Setze nun $f_p(q) := \alpha(|x(q)|^2/\epsilon^2)$ falls $q \in V$, und $f_p(q) := 0$ sonst. Setze nun $V_p := f_p^{-1}((1/2,\infty))$, eine offene Teilmenge von U die p enthält.

Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $p_1, \ldots, p_n \in K$, so dass $K \subset V_{p_1} \cup \cdots \cup V_{p_n}$. Setze $f := f_{p_1} + \cdots + f_{p_n}$. Es gilt $f(p) > 1/2$ für $p \in K$ und $f|_{M-U} = 0$. Zuletzt setze $\phi(p) := \alpha(1 - 2f(p))$. Diese Funktion ist glatt und hat alle gewünschten Eigenschaften. □

Um zu den Derivationen zurückzukommen: Falls f und g in einer Umgebung U eines Punktes $p \in M$ übereinstimmen, finde Abschneidefunktion ϕ welche ausserhalb von U verschwindet und mit $\phi(p) = 1$. Dann gilt

$$0 = \partial(0) = \partial((f-g)\phi) = \partial(f-g) + (f(p) - g(p))\partial(\phi) = \partial(f) - \partial(g).$$

Diese Sichtweise ist wichtig, weil auf diese Weise Vektorfelder als Ableitungsoperatoren aufgefasst werden können, wie der folgende Satz zusammenfasst. Es sollte bemerkt werden, dass dies in der Praxis, z.B. in der Differentialgeometrie, sehr häufig angewendet wird. Für uns wird diese Interpretation allerdings keine grosse Rolle spielen.

3.22 Satz. *Sei $X \in C^\infty(M, TM)$ ein glattes Vektorfeld, d.h. ein glatter Schnitt des Tangentialbündels, d.h. eine glatte Abbildung $X\colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. Dann definiert X eine* globale Derivation

$$X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)\colon f \mapsto (Xf\colon p \mapsto X_p f),$$

wobei $X_p := X(p)$ als Derivation am Punkt p aufgefasst wird. Es gilt die Derivationseigenschaft

$$X(fg) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g).$$

Proof. Es ist klar, dass für jedes $f \in C^\infty(M)$ $X(f)$ eine mengentheoretische Abbildung $M \to \mathbb{R}$ ist, und dass die Derivationseigenschaft erfüllt ist. Darstellung in lokalen Koordinaten zeigt, dass $X(f)$ wirklich glatt ist. □

4 Vektorraumbündel

Ein Vektorraumbündel (über einem Raum X) soll eine "Familie von Vektorräumen" E_x ($x \in X$) sein, die "stetig" von $x \in X$ abhängt. Präzise:

4.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Ein *Vektorraumbündel* über X ist ein topologischer Raum E mit einer stetigen Surjektion $p\colon E \to X$ und, für jedes $x \in X$, mit einer $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $E_x := p^{-1}(x)$.

Ausserdem soll es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ von x und einen Homöomorphismus $\phi\colon p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ geben, so dass

(1) $\phi|_{E_y}\colon E_y \to \{y\} \times \mathbb{R}^n$ für jedes $y \in U$ linear ist

(2) ϕ ist Faser-erhaltend, d.h. $\phi \circ \mathrm{pr}_U = p$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
E_U \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"] & U \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathrm{pr}_U"] \\
U \arrow[r, equal] & U.
\end{tikzcd}$$

E heisst *Totalraum* des Bündels, B die Basis. Die Homöomorphismen ϕ heissen *Vektorbündelkarten*. Eine Kollektion solcher Karten, deren Definitionsbereiche ganz E überdecken, heisst *Vektorbündelatlas*.

Die Abbildung $X \to E$ die jedem Punkt den Nullvektor von E_x zuordnet, wird *Nullschnitt* genannt. Sie ist ein Homöomorphismus auf Bild. Das Bild dieser Abbildung wird ebenfalls Nullschnitt genannt und in der Regel mit X identifiziert.

Wenn E und X glatte Mannigfaltigkeiten und alle vorkommenden Abbildungen glatt sind, sprechen wir von einem *glatten Vektorraumbündel*. Dann ist der Nullschnitt eine glatte Untermannigfaltigkeit.

Beachte, dass die Kartenwechsel $\psi\phi^{-1}\colon U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n$ fasererhaltende und faserweise lineare Homöomorphismen sind.

4.2 Beispiel. Sei X ein topologischer Raum. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $X \times \mathbb{R}^n$ in offensichtlicher Weise ein Vektorraumbündel, das sogenannte n-dimensionale *triviale Vektorraumbündel* über X. Insbesondere gibt es das *Nullbündel* $X \times \{0\}$.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist TM ein glattes Vektorraumbündel über M.

Dem offenen Möbiusband kann die Struktur eines (nicht-trivialen) Vektorraumbündels über S^1 gegeben werden.

4.3 Definition. Sei E ein Vektorbündel über X und F ein Vektorbündel über Y. Eine Abbildung $\Phi\colon E \to F$ heisst *Vektorraumbündel-Homomorphismus*, falls

(1) Φ stetig

(2) Φ ist *fasertreu*, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $\phi\colon X \to Y$, so dass $\phi \circ p_E = p_F \circ \Phi$, also folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p_E"] & F \arrow[d, "p_F"] \\
X \arrow[r, "\phi"] & Y.
\end{tikzcd}$$

(3) ϕ ist faserweise linear.

Ein wichtiger Spezialfall ist $X = Y$ und $\phi = \mathrm{id}_X$. In dieser Situation sagen wir, Φ heisst Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, falls es faserweise die entsprechende Eigenschaft hat.

Wir sagen, ein Vektorraumbündel ist *trivial*, wenn es isomorph zu $X \times \mathbb{R}^n$ ist (für geeignetes $n \in \mathbb{N}$).

4.4 Bemerkung. Es folgt direkt aus der Definition, dass die Verknüpfung von Vektorbündelhomomorphismen wieder ein Vektorbündelhomomorphismus ist.

4.5 Proposition. *Sei $\Phi\colon E \to F$ ein Vektorraumbündelisomorphismus zwischen zwei Bündeln über der Basis X. Dann ist Φ ein Homöomorphismus und Φ^{-1} ist ebenfalls ein Vektorbündelisomorphismus.*

Proof. Φ erhält die Fasern und ist faserweise bijektiv, also ist Φ bijektiv und stetig. Wir müssen "nur" noch zeigen, dass Φ^{-1} stetig ist. Es genügt, für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U zu finden, so dass $\Phi_U^{-1} := \Phi^{-1}|_{F_U}$ stetig ist, wobei $F_U := p_F^{-1}(U) \subset F$. Wähle U so, dass Karten $\phi_E\colon E_U \to U \times \mathbb{R}^n$ und $\phi_F\colon F_U \to U \times \mathbb{R}^n$ existieren. Diese sind Homöomorphismen. Φ_U^{-1} ist also genau dann stetig, wenn

$$\theta^{-1} = \phi_E \circ \Phi_U^{-1} \circ \phi_F^{-1}\colon U \times \mathbb{R}^n \to F_U \to E_U \to U \times \mathbb{R}^n$$

stetig ist. Hierbei ist $\theta = \phi_F \circ \Phi_U \circ \phi_E^{-1}$ stetig. Beachte weiterhin, dass für jedes $u \in U$ θ einen Isomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Fasern über u induziert, also der Multiplikation mit einer Matrix $A(u) \in Gl(n, \mathbb{R})$ entspricht, also $\theta(u, v) = (u, A(u)v)$.

Wir werden zeigen, dass die Abbildung $\tilde{\theta}\colon U \to Gl(n, \mathbb{R})\colon u \mapsto A(u)$ stetig ist. Beachte, dass $\theta^{-1}(u, v) = (y, A(u)^{-1}v)$. Da die Inversion $Gl(n, \mathbb{R}) \to Gl(n, \mathbb{R})\colon A \mapsto A^{-1}$ stetig ist, ist dann auch θ^{-1} stetig, und damit Φ^{-1}.

$\tilde{\theta}$ ist genau dann stetig, wenn die Komponentenfunktionen $\tilde{\theta}_{kl}\colon u \mapsto A(u)_{k,l}$ stetig sind. Diese sind gegeben durch

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\theta}_{kl}\colon U & \longrightarrow & U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\theta} & U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathrm{pr}_l} & \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & (u, e_k) & \longrightarrow & (u, A(u)e_k) & \longrightarrow & \langle A(u)e_k, e_l \rangle. \end{array}$$

Als Kompositionen stetiger Funktionen sind sie stetig. □

4.6 Definition. Sei $p\colon E \to X$ ein Vektorraumbündel, $Y \subset X$ ein Teilraum. Dann ist $E_Y := p^{-1}(Y)$ ein Vektorraumbündel über Y, die Einschränkung von E auf Y. Die Inklusion $E_Y \hookrightarrow E$ ist ein Vektorbündelhomomorphismus über der Inklusion $Y \hookrightarrow X$.

4.7 Beispiel. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, und $N \subset M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Die Einschränkung von TM auf N ist im allgemeinen nicht isomorph zu TN (die Dimensionen stimmen nicht überein).

4.8 Definition. Seien E und F zwei Vektorraumbündel über X, mit Bündelprojektionen p_E und p_F. Definiere

$$E \oplus F := \{(v, w) \in E \times F \mid p_E(v) = p_F(w)\}.$$

4.9 Satz. *$E \oplus F$ ist ein Vektorraumbündel über X, die* direkte Summe *von E und F. Es gibt (kanonische) Isomorphismen $(E \oplus F)_x \cong E_x \oplus F_x$.*

4.10 Bemerkung. Die Menge der (Isomorphieklassen von) Vektorraumbündeln über einem Raum X bildet eine abelsche Halbgruppe bezüglich direkter Summe, das Nullelement ist das Nullbündel.

4.11 Satz. *Seien $p_E \colon E \to X$ und $p_F \colon F \to Y$ Vektorraumbündel. Dann ist $p_E \times p_F \colon E \times F \to X \times Y$ ein Vektorraumbündel über $X \times Y$.*

Proof. Sei $x \in X$, $y \in Y$, $U \subset X$ eine offene Umgebung von x, $V \subset Y$ eine offene Umgebung von Y mit Vektorbündelkarten $\phi \colon E_U \to Y \times \mathbb{R}^n$, $\psi \colon F_V \to V \times \mathbb{R}^m$. Dann ist $\phi \times \psi \colon E_U \times F_V = (E \times F)_{U \times V} \to U \times \mathbb{R}^n \times V \times \mathbb{R}^n \approx (U \times Y) \times \mathbb{R}^{n+m}$ eine Vektorbündelkarte, die in einer Umgebung von $(x, y) \in X \times Y$ definiert ist. □

$E \oplus F$ ist die Einschränkung von $E \times F$ auf die Diagonale $X \approx \{(x,x)\} \subset X \times X$, und damit ebenfalls ein Vektorraumbündel.

4.12 Satz. *Sei $f \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und $p_E \colon E \to Y$ ein Vektorraumbündel. Definiere $f^*E := \{(v,x) \in E \times X \mid p_E(v) = f(x)\}$. Dann ist $p \colon f^*E \to X \colon (v,x) \mapsto x$ ein Vektorraumbündel. Wir erhalten einen Vektorbündelhomomorphismus $\Phi \colon f^*E \to E \colon (v,x) \mapsto v$ mit $\Phi \circ p_E = f \circ p$.*

Proof. Wir definieren zunächst das Vektorraumbündel $\mathrm{id}_X \times p_Y \colon X \times E \to X \times Y$. Karten sind gegeben durch $\mathrm{id} \times \phi \colon X \times E_U \to X \times U \times \mathbb{R}^n$, wobei $\phi \colon E_U \to U \times \mathbb{R}^n$ die Vektorraumbündelkarten von E durchläuft.

Die Projektion $\Pi \colon X \times E \to E$ ist ein Vektorbündelhomomorphismus. Die zugehörige Abbildung auf den Basisräumen ist die Projektion $X \times Y \to Y$.

Nun ist f^*E die Einschränkung von $X \times E$ auf die Untermenge

$$X \approx \{(x, f(x))\} \subset X \times Y,$$

also ebenfalls ein Vektorraumbündel. Φ ist die Verknüpfung der Inklusion von f^*E in $X \times E$ mit der Projektion Π, also ein Vektorbündelhomomorphismus. Die Verknüpfung $X \to X \times Y \to Y \colon x \mapsto (x, f(x)) \mapsto f(x)$ ist gerade f. Daraus folgt die letzte Aussage. □

5 Singuläre Homologie

In der Einführung wurde angedeutet, dass man wichtige Informationen aus einer Zerlegung eines Raumes in Simplizes erhalten kann (unser Beispiel war die Eulercharakteristik). Diese Vorgehensweise hat zwei offensichtliche Probleme: es kommt vor, dass man einen Raum auf viele verschiedene Weisen so zerlegen kann. Es ist dann schwierig, zu zeigen dass die definierten Invarianten Homöomorphieinvarianten sind. Ausserdem gibt es Räume, die sich nicht auf die vorgeschriebene Weise zerlegen lassen. Der Ausweg aus diesem Dilemma ist (wieder einmal) dadurch gegeben, dass man alle möglichen (und jetzt auch sehr “singulären”) Zerlegungen betrachten will. Dies führt zur *singulären Homologie.*

5.1 Definition. Der Standard n-Simplex Δ_n ist die affine Hülle der $(n+1)$ Standard-Basisvektoren $e_0, \dots, e_n$, also $\Delta_n := \{\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \mid \lambda_i \geq 0, \lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1\}$. Bilder!

Wir haben für $0 \leq k \leq n$ die *Seitenabbildungen*

$$F_k^n \colon \Delta_{n-1} \to \Delta_n \text{ mit } e_i \mapsto \begin{cases} e_i; & i < k \\ e_{i+1}; & i \geq k. \end{cases}$$

Die Abbildung wird affin linear fortgesetzt.

5.2 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Ein *singulärer n-Simplex* von X ist eine stetige Abbildung $\sigma \colon \Delta_n \to X$.

Wir definieren für $p \geq 0$ die *singuläre Kettengruppe* $C_p(X)$ als die freie abelsche Gruppe erzeugt von der Menge aller singulären p-Simplizes von X. Das heisst, ein Element von $C_p(X)$ (genannt eine *Kette*) ist eine formale Summe

$$\sum_{\sigma \colon \Delta_p \to X} \lambda_\sigma \cdot \sigma \qquad \text{mit } \lambda_\sigma \in \mathbb{Z},\ \lambda_\sigma \neq 0 \text{ nur für endlich viele } \sigma.$$

Zwei solche Ketten sind gleich wenn die Koeffizienten vor jedem singulären Simplex übereinstimmen. Addiert werden sie, indem die Koeffizienten addiert werden.

Wir setzen $C_p(X) := \{0\}$ für $p < 0$.

Definiere für $p > 0$ einen Homomorphismus $c_p(X) \colon C_p(X) \to C_{p-1}(X)$ durch

$$c_p\left(\sum \lambda_\sigma \sigma\right) := \sum_{i=0}^n \sum (-1)^i \lambda_\sigma \sigma \circ F_i^n.$$

Diese Abbildung wird *Differential* oder *Randabbildung* genannt. Die Kollektion all der Gruppen $C_p(X)$, mit den Differentialen $c_p(X)$ heisst *singulärer Kettenkomplex* von X.

Wir setzten $c_p(X) := 0$ für $p \leq 0$.

5.3 Bemerkung. Beachte, dass diese Gruppen folgende Vorzüge haben: sie berücksichtigen sicher alle möglichen Simplizes, die in X enthalten sein können. Und (durch einen "billigen" Trick) haben wir die algebraische Struktur einer abelschen Gruppe erhalten.

Aber: die $C_p(X)$ sind in der Regel *riesig*.

Wir abstrahieren jetzt etwas:

5.4 Definition. Ein Kettenkomplex (C_*, c_U) ist eine Folge C_p $(p \in \mathbb{Z})$ von abelschen Gruppen mit Homomorphismen $c_p \colon C_p \to C_{p-1}$, so dass für jedes $p \in \mathbb{Z}$ gilt: $c_{p-1} \circ c_p = 0$.

Die n-te *Homologie* von (C_*, c_*) ist definiert als

$$H_n(C_*, c_*) := \ker(c_n) / \operatorname{im}(c_{n+1}).$$

5.5 Lemma. *Für die oben definierten Randabbildungen gilt, falls $k > l$,*

$$F_k^{n+1} \circ F_l^n = F_l^{n+1} \circ F_{k-1}^n.$$

Proof. Man prüft sofort nach, dass beide Abbildungen dasselbe mit den Standard Basisvektoren machen. Dadurch ist die affin lineare Abbildung aber schon eindeutig festgelegt. □

5.6 Lemma. *Für die singulären Differentiale gilt für jedes $p \in \mathbb{Z}$*

$$c_{p-1}(X) \circ c_p(X) = 0$$

Proof. Dies muss offenbar nur für $p > 1$ nachgeprüft werden. Dann hat man

$$\begin{aligned} c_{p-1} \circ c_p(\sigma) &= c_{p-1}(\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i \sigma \circ F_i^p) = \sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \sigma \circ F_i^p \circ F_j^{p-1} \\ &= \sum_{i \leq j}(-1)^{i+j}\sigma \circ F_i^p \circ F_j^{p-1} + \sum_{i>j}(-1)^{i+j}\sigma \circ F_i^p \circ F_j^{p-1} \\ &\underset{(*)}{=} \sum_{i \leq j}(-1)^{i+j}\sigma \circ F_i^p \circ F_j^{p-1} + \sum_{i \leq j}(-1)^{j+1+i}\sigma \circ \underbrace{F_{j+1}^p \circ F_i^{p-1}}_{=F_i^p \circ F_j^{p-1}} = 0. \end{aligned}$$

Bei (*) wird in der zweiten Summe i umbenannt zu $j+1$ und j zu i. Die Summe ist Null wegen des vorhergehenden Lemmas. □

5.7 Definition. Der singuläre Kettenkomplex ist also ein Kettenkomplex im Sinne unserer abstrakten Definition. Die *singuläre Homologie* $H_n(X)$ ist definiert als die Homologie diese Kettenkomplexes, d.h.

$$H_n(X) := \ker(c_n(X))/\operatorname{im}(c_{n+1}(X)).$$

5.8 Beispiel. $H_0(\{*\}) = \mathbb{Z}$, $H_n(\{*\}) = 0$ für $n > 0$.

Proof. Beachte: für jedes $n \geq 0$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\sigma_n \colon \Delta_n \to \{*\}$, d.h. genau ein singuläres Simplex. Damit gilt $C_q(*) = \mathbb{Z}$ für jedes $q \geq 0$. Für die Randabbildung gilt

$$c_q(\sigma_q) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \underbrace{\sigma \circ F_i^p}_{=\sigma_{q-1}}.$$

Nun gilt $\sum_{i=0}^q(-1)^i = 0$ falls q ungerade, und $\sum_{i=0}^q(-1)^i = 1$ falls q gerade. Man erhält für den Kettenkomplex

$$\to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \to 0 \to$$

Folglich stimmen für $n \neq 0$ Kern und Bild des Differentials überein, während $H_0(*) = \mathbb{Z}/0$. □

5.9 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation *in derselben Wegzusammenhangskomponente* auf X, wobei $x \sim y$ genau wenn es eine stetige Abbildung $\phi\colon [0,1] \to X$ mit $\phi(0) = x$ und $\phi(1) = y$ gibt. Die Äquivalenzklassen heissen *Wegekomponenten* oder *Wegzusammenhangskomponenten*. Die Menge der Wegekomponenten heisst $\pi_0(X)$.

5.10 Lemma. *Sei $X = \bigcup_{X_i \in \pi_0(X)} X_i$ die disjunkte Zerlegung von X in seine Wegekomponenten (beachte, dass X* nicht *notwendig homöomorph zur disjunkten Vereinigung der X_i mit der entsprechenden Topologie ist).*

Dann gilt $C_q(X) = \oplus_{X_i \in \pi_0(X)} C_q(X_i)$, und $c_q(C_q(X_i)) \subset C_{q-1}(X_i)$. Insbesondere folgt

$$H_n(X) \cong \oplus_{X_i \in \pi_0(X)} H_n(X_i)$$

Proof. Beachte zunächst, dass für jedes $n \geq 0$ Δ_n wegzusammenhängend ist (man kann lineare Wege verwenden). Es folgt, dass für jedes singuläre Simplex $\sigma\colon \Delta_n \to X$ ein $X_i \in \pi_0(X)$ existiert mit $\sigma(\Delta_n) \subset X_i$. Also ist die Menge der singulären Simplizes von X die disjunkte Vereinigung der singulären Simplizes der X_i (vereinigt über alle $X_i \in \pi_0(X)$). Für die von den Mengen erzeugten freien abelschen Gruppen übersetzt sich disjunkte Vereinigung in direkte Summe.

Es folgt sofort aus der Definition, dass $(\sigma \circ F_i^q)(\Delta_{q-1}) \subset X_i$ falls $\sigma(\Delta_q) \subset X_i$, und somit $c_q(C_q(X_i)) \subset C_{q-1}(X_i)$. Folglich zerfallen auch Kern und Bild der Kettenabbildungen als direkte Summen, und dies impliziert dasselbe für die Homologiegruppen. □

5.11 Lemma. *Sei $X \neq \emptyset$ ein wegzusammenhängender Raum. Dann gilt*

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}.$$

Für $a \in X$ sei $\sigma_a\colon \Delta_0 \to X$ die Abbildung, die den einzigen Punkt von Δ_0 auf a sendet. Für jedes $a \in X$ wird $H_0(X)$ erzeugt von σ_a, und all diese Erzeuger sind gleich.

Proof. Definiere die *Augmentation* $\epsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}\colon \sum \lambda_\sigma \sigma \mapsto \sum \lambda_\sigma$. Wenn $X \neq \emptyset$ ist dies ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Beachte weiter, dass für $\sigma\colon \Delta_1 \to X$ gilt $c_1(\sigma) = \sigma_{\sigma(e_1)} - \sigma_{\sigma(e_0)}$, also $\epsilon(c_1(\sigma)) = 0$. Da die σ die abelsche Gruppe $C_1(X)$ erzeugen, folgt $\epsilon(\mathrm{im}(c_1)) = 0$, also wird eine (surjektive) Abbildung $\epsilon_*\colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$ induziert, die σ_a für jedes $a \in X$ auf 1 schickt. Um Injektivität zu zeigen, wähle $x_0 \in X$ und für jedes $x \in X$ einen Weg $\sigma_{x,x_0}\colon \Delta_1 \to X$ mit $\sigma_{x,x_0}(e_1) = x$, $\sigma_{x,x_0}(e_0) = x_0$. Falls nun $\epsilon(\sum \lambda_a \sigma_a) = 0$, dann gilt $\sum \lambda_a \sigma_a = \sum \lambda_a \sigma_a - (\sum \lambda_a)\sigma_{x_0}) = \sum \lambda_a(\sigma_a - \sigma_{x_0}) = \sum \lambda_a c_1(\sigma_{a,x_0}) \in \mathrm{im}(c_1)$, also wird nur das Nullelement aus $H_0(X)$ von ϵ_* auf Null abgebildet. □

Wieder mal etwas Algebra:

5.12 Definition. Seien (C_n, c_n) und (D_n, d_n) zwei Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* zwischen den Kettenkomplexen ist eine Folge $f_n\colon C_n \to D_n$ von Homomorphismen, so dass $f_{n-1} \circ c_n = d_n \circ f_n$. Es folgt dass $f_n(\ker(c_n)) \subset \ker(d_n)$ und $f_n(\mathrm{im}(c_{n+1})) \subset \mathrm{im}(d_{n+1})$. Also induziert f_n eine Abbildung

$$H_n(f_*)\colon H_n(C_*, c_*) \to H_n(D_*, d_*).$$

5.13 Lemma. *Seien C_*, D_*, E_* Kettenkomplexe und $f_*\colon C_* \to D_*$, $g_*\colon D_* \to E_*$ Kettenabbildungen. Dann ist $g_n \circ f_n\colon C_n \to E_n$ eine Kettenabbildung, und es gilt $H_n(g_* \circ f_*) = H_n(g_*) \circ H_n(f_*)$. Ausserdem gilt $H_n(\mathrm{id}_{C_*}) = \mathrm{id}_{H_n(C_*)}$.*

Proof. Direkte Rechnungen. □

5.14 Lemma. *Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Die Abbildung*

$$C_p(f)\colon C_p(X) \to C_p(Y)\colon (\sigma\colon \Delta_p \to X) \mapsto (f \circ \sigma\colon \Delta_p \to Y)$$

ist eine Kettenabbildung. Falls $g\colon Y \to Z$ stetig ist, gilt $C_p(g \circ f) = C_p(g) \circ C_p(f)$, ausserdem $C_p(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{C_p(X)}$.

(Beachte, es genügt, die Abbildungen auf der Basis der singulären Simplizes anzugeben, und für diese die Eigenschaften nachzurechnen).

Proof. Es gilt $C_{p-1}(f)(c_p(\sigma)) = C_{p-1}(f)(\sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ F_i^p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i f \circ \sigma \circ F_i^p = c_p(C_p(f)(\sigma))$.

Die übrigen Aussagen sind klar. □

5.15 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. $H_p(f)\colon H_p(X) \to H_p(Y)$ ist die von $C_*(f)$ auf Homologie induzierte Abbildung.

Wir sehen, dass singuläre Homologie alle Funktoreigenschaften hat.

5.16 Korollar. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann ist*

$$H_n(f)\colon H_n(X) \to H_n(Y)$$

ein Isomorphismus.

Proof. Die Inverse ist wegen der Funktoreigenschaften durch $H_n(f^{-1})$ gegeben. □

Wir haben jetzt einige nette Eigenschaften von singulärer Homologie hergeleitet, aber immer noch keinen Nutzen ziehen können, da wir noch keine Berechnungsmethoden kennen. Die erste wichtige Eigenschaft ist Homotopieinvarianz.

5.17 Satz. *Seien $f, g\colon X \to Y$ zwei homotope stetige Abbildungen, d.h. es existiert $H\colon X \times [0,1] \to Y$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$.*

Dann gilt $H_n(f) = H_n(g)$ als Abbildungen von $H_n(X)$ nach $H_n(Y)$.

Der Beweis dieses Satzes ist etwas umfangreicher. Wir zeigen zunächst, dass er (wegen der Funktoreigenschaft) aus dem folgenden Lemma, welches einen Spezialfall darstellt, folgt, und beweisen dann das Lemma.

5.18 Lemma. *Sei X ein topologischer Raum. Seien $i_0\colon X \to X \times [0,1]$ und $i_1\colon X \to X \times [0,1]$ gegeben durch $i_k(x) = (x, k)$ für $k = 0, 1$. Dann gilt*

$$H_n(i_0) = H_n(i_1)\colon H_n(X) \to H_n(X \times [0,1]) \qquad \textit{für jedes } n \in \mathbb{Z}.$$

Wir zeigen jetzt zunächst, dass aus dieser Eigenschaft bereits die Homotopie-Invarianz-Eigenschaft, also der Satz, folgt:

Beachte dazu, dass in der Situation des Satzes $f = H \circ i_0$ und $g = H \circ i_1$. Es folgt

$$H_n(f) = H_n(H \circ i_0) = H_n(H) \circ H_n(i_0)$$
$$H_n(g) = H_n(H \circ i_1) = H_n(H) \circ H_n(i_1).$$

Aus dem Lemma folgt also bereits, dass diese beiden Ausdrücke übereinstimmen.

Um das Lemma zu beweisen, entwickeln wir (wie jetzt schon üblich) erst wieder etwas homologische Algebra.

5.19 Definition. Seien (C_*, c_*) und (D_*, d_*) zwei Kettenkomplexe, $f_*\colon C_* \to D_*$ und $g_*\colon C_* \to D_*$ zwei Kettenabbildungen. Eine *Kettenhomotopie* zwischen f_* und g_* ist eine Folge von Homomorphismen

$$h_n\colon C_n \to D_{n+1}; \qquad n \in \mathbb{Z}$$

(beachte die Grad-Verschiebung um eins nach oben — eine Kettenhomotopie geht immer in die entgegengesetzte Richtung zu den Differentialen), die folgende Eigenschaft haben:

$$d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ c_n = f_n - g_n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Wenn so eine Kettenhomotopie existiert, heissen f_* und g_* kettenhomotop.

Die Kettenabbildung $f_*\colon C_* \to D_*$ heisst eine *Kettenhomotopieäquivalenz*, falls eine Kettenabbildung $u_*\colon D_* \to C_*$ existiert, die *Kettenhomotopieinverse* von f_*, so dass $u_* \circ f_*\colon C_* \to C_*$ und $f_* \circ u_*\colon D_* \to D_*$ beide kettenhomotop zur Identität sind.

Zwei Kettenkomplexe heissen *Kettenhomotopieäquivalent*, wenn eine Kettenhomotopieäquivalenz zwischen ihnen existiert.

5.20 Lemma. *Seien $f_*, g_*\colon C_* \to D_*$ zwei kettenhomotope Kettenabbildungen. Dann gilt $H_n(f_*) = H_n(g_*)\colon H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Proof. Sei $h_n\colon C_n \to D_{n+1}$ eine Kettenhomotopie zwischen f_* und g_*. Sei $x \in C_n$ mit $c_n(x) = 0$ (d.h. x repräsentiert das Element $x + \mathrm{im}(c_{n+1}) \in H_n(C_*)$). Aus der Definition einer Kettenhomotopie folgt

$$f_n(x) - g_n(x) = d_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(c_n(x)) = d_{n+1}(h_n(x)) \in \mathrm{im}(d_{n+1}).$$

Also repräsentieren $f_n(x)$ und $g_n(x)$ dasselbe Element in $H_n(D_*)$. Da x beliebig war, folgt die Behauptung. □

5.21 Korollar. *Sei $f_*\colon C_* \to D_*$ eine Kettenhomotopieäquivalenz. Dann ist $H_n(f_*)\colon H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.*

Proof. Sei $g_*\colon D_* \to C_*$ eine Kettenhomotopieinverse. Dann sind $f_* \circ g_*$ und $g_* \circ f_*$ kettenhomotop zur Identität. Die Funktoreigenschaft und das Lemma implizieren dass $H_n(f_*)$ und $H_n(g_*)$ inverse Homomorphismen sind. □

Um unser topologisches Lemma zu beweisen, werden wir nun eine Kettenhomotopie zwischen

$$C_*(i_0)\colon C_*(X) \to C_*(X \times [0,1])$$

und zwischen

$$C_*(i_1)\colon C_*(X) \to C_*(X \times [0,1])$$

konstruieren. Die Aufgabe ist also, jedem singulären n-Simplex $\sigma\colon \Delta_n \to X$ ein singuläres $(n+1)$-Simplex in $X \times [0,1]$ zuzuordnen (oder besser gesagt, eine ganze Kette). Die einzig vernünftige Möglichkeit ist die Multiplikation von allem mit $[0,1]$ (also bilde σ ab auf $\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}$). Dummerweise ist das zweite kein Simplex mehr, da $\Delta_n \times [0,1]$ nicht der Standard $(n+1)$-Simplex ist. Aber wir können geeignet unterteilen:

5.22 Definition. Definiere für $0 \le j \le n$ $\alpha_j^n \colon \Delta_{n+1} \to \Delta_n \times [0,1]$ durch affin lineare Fortsetzung der Abbildung, wobei

$$\alpha_j^n(e_i) := \begin{cases} (e_i, 0); & i \le j \\ (e_{i-1}, 1); & k > j. \end{cases}$$

Zeichne zwei- und drei-dimensionalen Fall.

Es gilt tatsächlich, dass die Bilder aller α_j^n für festes n eine Triangulierung von $\Delta_n \times [0,1]$ als geometrischen Simplizialkomplex liefern. Wir werden das allerdings nicht benötigen, und daher auch nicht beweisen.

Wir definieren nun die Kettenhomotopie

$$h_n \colon C_n(X) \to C_{n+1}(X \times [0,1]) \text{ durch } h_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \alpha_j^n$$

falls $\sigma \colon \Delta_n \to X$ ein singulärer n-Simplex, und durch lineare Fortseztung. Wir müssen natürlich noch zeigen, dass dies wirklich eine Kettenhomotopie wie gewünscht ist. Dazu benötigen wir das folgende Lemma, das die Beziehung zwischen der Triangulierung α_j^n von $\Delta_n \times [0,1]$ und den Seitenabbildungen F_j^n herstellt.

5.23 Lemma. *Es gelten für $0 \le i \le n+1$, $0 \le j \le n$ folgende Identitäten von Abbildungen von Δ_n nach $\Delta_n \times [0,1]$:*

$$\alpha_j^n \circ F_i^{n+1} = \begin{cases} (F_i^n \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \alpha_{j-1}^{n-1}; & i < j \\ (F_{i-1}^n \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \alpha_j^{n-1}; & i > j+1 \\ \alpha_{j-1}^n \circ F_j^{n+1}; & i = j > 0 \\ \alpha_{j+1}^n \circ F_{j+1}^{n+1}; & i = j+1 \le n \\ i_1; & i = j = 0 \\ i_0; & i = n+1, j = n, \end{cases}$$

wobei $i_k \colon \Delta_n \to \Delta_n \times [0,1]$ die Inklusionen nach $\Delta_n \times \{k\}$ ist.

Proof. Elementares Nachrechnen. □

Damit ergibt sich für $\sigma\colon \Delta_n \to X$

$$
\begin{aligned}
&h_{n-1}(c_n(\sigma)) + c_{n+1}(h_n(\sigma))\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{j+i}((\sigma\circ F_i^n)\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ \alpha_j^{n-1} +\\
&\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+i}(\sigma\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_j^n\circ F_i^{n+1}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{i+j}(\sigma\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ(F_i^n\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_j^{n-1}\\
&+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}(\sigma\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ(F_i^n\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_{j-1}^{n-1}\\
&+ \sum_{i>j+1}(-1)^{i+j}(\sigma\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ(F_{i-1}^n\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_j^{n-1}\\
&+ \sum_{i=1}^{n}(\sigma\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_i^n\circ F_i^{n+1}\\
&+ \sum_{i=1}^{n+1}(-1)\cdot(\sigma\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_{i-1}^n\circ F_i^{n+1}\\
&+ (\sigma\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_0^n\circ F_0^{n+1} + (-1)^{n+(n+1)}(\sigma\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_n^n\circ F_{n+1}^{n+1}
\end{aligned}
$$

Wobei für die Umformung das obige Lemma verwendet wurde. Man benenne nun im zweiten Summanden j um zu $j+1$, und im dritten i zu $i+1$. Daran sieht man, dass diese beiden Summanden zusammen genau das negative des ersten Summanden ergeben. Das Lemma zeigt ebenfalls, dass der vierte Summand sich gegen den fünften weghebt. Damit erhält man

$$
\begin{aligned}
&h_{n-1}(c_n(\sigma)) + c_{n+1}(h_n(\sigma))\\
&= (\sigma\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_0^n\circ F_0^{n+1} - (\sigma\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_n^n\circ F_{n+1}^{n+1}\\
&= \sigma\circ i_1 - \sigma\circ i_0 = C_n(i_1)(\sigma) - C_n(i_0)(\sigma).
\end{aligned}
$$

Durch lineare Fortsetzung folgt das Homotopie-Lemma, und damit Homotopieinvarianz von singulärer Homologie.

5.24 Korollar. *Seien X und Y zwei homotopieäquivalente topologische Räume. Dann gilt $H_n(X) \cong H_n(Y)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Insbesondere, falls ein Raum X zusammenziehbar ist (also homotopieäquivalent zu einem Punkt), gilt $H_n(X) = 0$ für $n \neq 0$, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Als nächstes wollen wir uns überlegen, wie man die singuläre Homologie eines Raums X und eines Teilraums A in Beziehung zueinander setzen kann. Dazu müssen wir *relative Homologiegruppen* einführen.

5.1 Paare von Räumen

5.25 Definition. Sei $A \subset X$ ein Paar von topologischen Räumen. Wir schreiben dann (X, A). Beachte, dass $A = \emptyset$ zugelassen ist. Wir fassen X auf als

Raumpaar $(X, \emptyset)$. Eine Abbildung $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ zwischen Raumpaaren ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(A) \subset B$ (keine Surjektivität gefordert).

Seien (X,A) und (Y,B) zwei Raumpaare. Wir setzen $(X,A) \times (Y,B) := (X \times Y, X \times A \cup B \times Y)$.

Zwei Abbildungen $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ heissen *homotop* (als Abbildungen von Paaren), wenn es eine Homotopie

$$H\colon (X,A) \times [0,1] = (X \times [0,1], A \times [0,1]) \to (Y,B)$$

gibt mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$.

$C_*(A)$ ist ein Unterkomplex von $C_*(X)$. D.h. $C_n(A)$ ist eine Untergruppe von $C_n(X)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und das Differential von $C_*(A)$ ist die Einschränkung des Differentials von $C_*(X)$. Definiere $C_n(X,A) := C_n(X)/C_n(A)$, und $c_n(X,A)\colon C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$ als die von $c_n(X)$ induzierte Abbildung. Damit wird $C_*(X,A)$ ein Kettenkomplex. der *relativen singulären Kettenkomplex* des Paars (X,A). Wir definieren $H_n(X,A) := H_n(C_*(X,A))$, die *relative singuläre Homologie* des Paars (X,A).

Um die Beziehungen zwischen $H_n(A)$, $H_n(X)$ und $H_n(X,A)$ zu verstehen, brauchen wir erst wieder etwas abstrakte homologische Algebra.

5.26 Definition. Seien $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ eine Sequenz von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Diese Sequenz heisst *exakt* (an B), falls $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$. Eine Sequenz $\cdots \to A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-2} \to \cdots$ heisst (überall) exakt, falls jede Teilsequenz $A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-2}$ exakt (bei A_{n-1}) ist.

Insbesondere sprechen wir von einer *kurzen exakten Sequenz* $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$, falls i injektiv ist, p surjektiv, und $\ker(p) = \operatorname{im}(i)$.

Eine Sequenz $C_* \xrightarrow{f_*} D_* \xrightarrow{g_*} E_*$ von Kettenkomplexen (d.h. f_* und g_* sind Kettenabbildungen) heisst exakt, falls $C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n$ exakt ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Entsprechend definiert man *kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen.*

Der folgende Satz ist einer der wichtigsten Sätze in der homologischen Algebra:

5.27 Satz. *Sei* $0 \to C_* \xrightarrow{f_*} D_* \xrightarrow{g_*} E_* \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen.*

Dazu gibt es eine natürliche lange exakte Sequenz von Homologiegruppen

$$\to H_{n+1}(E_*) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(C_*) \xrightarrow{H_n(f_*)} H_n(D_*) \xrightarrow{H_n(g_*)} H_n(E_*) \xrightarrow{\delta_{n-1}} .$$

Die (zu definierende) Abbildungen δ_n heissen die Randabbildungen *der langen exakten Homologiesequenz.*

Natürlich *heisst, dass für folgendes kommutatives Diagramm, wobei die horizontalen kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen sind, und die vertikalen Kettenabbildungen:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_* & \xrightarrow{f_*} & D_* & \xrightarrow{g_*} & E_* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u_*} & & \downarrow{\scriptstyle v_*} & & \downarrow{\scriptstyle w_*} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_* & \xrightarrow{f'_*} & D'_* & \xrightarrow{g'_*} & E'_* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von langen exakten Homologiesequenzen wie folgt entsteht:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}(E_*) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(C_*) & \xrightarrow{H_n(f_*)} & H_n(D_*) & \xrightarrow{H_n(g_*)} & H_n(E_*) & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & \\
 & \downarrow{\scriptstyle H_n(w_*)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(u_*)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(v_*)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(w_*)} & \\
H_{n+1}(E'_*) & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & H_n(C'_*) & \xrightarrow{H_n(f'_*)} & H_n(D'_*) & \xrightarrow{H_n(g'_*)} & H_n(E'_*) & \xrightarrow{\delta'_{n-1}} &
\end{array}$$

Merkregel: *Die Randabbildungen erniedrigen den Grad um eins, genau wie die Differentiale.*

Proof. Wir beginnen damit, die Randabbildungen zu definieren. Sei dazu $x \in E_n$ mit $e_n(x) = 0$, also x repräsentiert ein Element von $H_n(E_*)$. Da $g_n\colon D_n \to E_n$ surjektiv ist, gibt es ein Urbild $y \in D_n$ mit $g_n(y) = x$. Nun gilt $g_{n-1}(d_n(y)) = e_n(g_n(y)) = e_n(x) = 0$ (da g_* Kettenabbildung). Also gilt $d_n(y) \in \ker(g_n) = \mathrm{im}(f_n)$, d.h. es gibt $z \in C_{n-1}$ mit $f_{n-1}(z) = d_n(y)$. Es gilt $0 = d_{n-1}(d_n(y)) = d_{n-1}(f_{n-1}(z)) = f_{n-2}(c_{n-1}(z))$. Da f_{n-2} injektiv, folgt $c_{n-1}(z) = 0$.

Wir setzen $\delta_n([x]) := [z] \in H_{n-1}(C_*)$.

Es bleibt jetzt zu zeigen, dass diese Definition unabhängig von den Wahlen ist, die getroffen wurden, und dass damit die Homologiesequenz wirklich eine lange exakte Sequenz wird. Dies geschieht mittels Diagrammjagt. Es ist empfehlenswert, das selber durchzuchecken, aber ich habe keine Lust, das jetzt alles aufzuschreiben (vgl. z.B. Bredon: Topology and Geometry, Theorem IV.5.6.). $\square$

Jetzt wieder zurück zur singulären Homologie:

5.28 Satz. *Sei X ein topologischer Raum mit Teilraum A. Dann erhält man eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen*

$$0 \to C_*(A) \to C_*(X) \to C_*(X, A) \to 0,$$

und damit eine lange exakte Homologiesequenz

$$\to H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \to$$

Diese lange exakte Homologiesequenz ist natürlich unter Abbildungen von Raumpaaren, d.h. falls Y ein weiterer topologischer Raum mit Teilraum B ist, und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung mit $f(A) \subset B$ (in dieser Situation schreiben wir $f\colon (X, A) \to (Y, B)$), dann erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \xrightarrow{\delta_n} & \\
 & \downarrow{\scriptstyle H_{n+1}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(f)} & \\
H_{n+1}(Y, B) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\delta_n} & .
\end{array}$$

Proof. $C_*(A)$ ist offensichtlich ein Unterkomplex von $C_*(X)$, und $C_*(X, A)$ ist gerade so definiert, dass man die gewünschte kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen erhält. Homologische Algebra liefert uns dann sofort die entsprechende lange exakte Homologiesequenz.

Beachte, dass jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Kettenabbildung

$$C_*(f)\colon C_*(X) \to C_*(Y)$$

induziert. Falls $f(A) \subset B$, induziert f auf gleiche Weise (durch Einschränkung) $C_*(f)\colon C_*(A) \to C_*(B)$. Es folgt wieder sofort, dass wir eine induzierte Abbildung auf dem Kettenkomplex von Quotienten $C_*(f)\colon C_*(X,A) \to C_*(Y,B)$ erhalten, welcher eine Kettenabbildung ist, und so dass man ein kommutatives Diagramm mit kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle C_*(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle C_*(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle C_*(f)} & & \\
0 & \longrightarrow & C_*(B) & \longrightarrow & C_*(Y) & \longrightarrow & C_*(Y,B)\Big\downarrow & & 0
\end{array}$$

erhält. Aus der Natürlichkeitsaussage unseres Satzes aus der homologischen Algebra folgt damit die Natürlichkeitsaussage des Satzes. □

5.2 Axiome für Homologie

Eine Homologietheorie ist ein Funktor mit gewissen weiteren Eigenschaften. Wir werden jetzt zunächst einmal den Begriff des Funktors präzisieren.

5.29 Definition. Eine *Kategorie* C besteht aus:

(1) einer Klasse von *Objekten* $Ob(C)$ (nicht notwendigerweise eine Menge),

(2) für je zwei Objekte $X, Y \in Ob(C)$ einer Menge Mor(X,Y) von sogenannten *Morphismen* von X nach Y

(3) für jedes $X \in Ob(C)$ dem Identitätselement $\mathrm{id}_X \in Mor(X,X)$,

(4) für jedes $X, Y, Z \in Ob(C)$ einer *Verknüpfungs*-Abbildung

$$\circ\colon Mor(X,Y) \times Mor(Y,Z) \to Mor(X,Z)$$

Dabei wird gefordert, dass die Verknüpfung *assoziativ* ist, also $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für $f \in Mor(X,Y)$, $g \in Mor(Y,Z)$, $h \in Mor(Z,W)$, und dass $\mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X$ für jedes $f \in Mor(X,Y)$.

5.30 Beispiel. (1) Die Kategorie, deren Objekte alle Mengen sind, und so dass die Morphismen von X nach Y gerade die Menge der (mengentheoretischen) Abbildungen von X nach Y ist.

(2) Kategorie TOP:
Objekte sind alle topologischen Räume, $Mor(X,Y) = \{f\colon X \to Y \mid f \text{ stetig}\}$.

(3) Kategorie TOP^2:
Objekte sind Paare von topologischen Räumen (X,A) (also $A \subset X$), Morphismen stetige Abbildung zwischen Paaren von topologischen Räumen (d.h. also $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(A) \subset B$).

(4) Kategorie ABEL:
Objekte sind alle abelschen Gruppen, Morphismen Gruppenhomomorphismen

(5) Sei G eine Gruppe, wir definieren eine G entsprechende Kategorie mit einem Objekt $*$, und mit $Mor(*, *) = G$. Dabei setzen wir $\mathrm{id}_* := 1$ und die Verknüpfung von zwei Objekten als Produkt in G.

5.31 Definition. Seien C, D Kategorien. Ein *Funktor* $F\colon C \to D$ ordnet jedem $X \in Ob(C)$ ein Objekt $F(X) \in Ob(D)$ zu, und jedem Morphismus $f\colon X \to Y$ einen Morphismus $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$. Dabei wird gefordert, dass die Funktoreigenschaften erfüllt sind, also $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ und $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ wenn immer diese Ausdrücke Sinn machen.

5.32 Definition. Eine *Homologietheorie* besteht aus einer Sequenz von Funktoren

$$h_n\colon TOP^2 \to ABEL; \qquad n \in \mathbb{Z},$$

und natürlichen Transformationen

$$\delta_n(X, A)\colon h_n(X, A) \to h_{n-1}(A, \emptyset).$$

Natürliche Transformation heisst hierbei, dass für jeden Homomorphismus

$$f\colon (X, A) \to (Y, B)$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_n(X,A)} & h_{n-1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle h_n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle h_{n-1}(f)} \\ h_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial_n(Y,B)} & h_{n-1}(B) \end{array}$$

kommutiert. Wir definieren $h_n(X) := h_n(X, \emptyset)$.

Es handelt sich um eine Homologietheorie, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(1) **(Homotopie-Invarianz)**: Falls $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ homotop als Abbildungen von Paaren sind, dann gilt $h_n(f) = h_n(g)\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

(2) **(Paarsequenz)**: Man hat eine lange exakte Sequenz

$$\to h_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} h_n(A) \to h_n(X) \to h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)}$$

wobei die nicht benannten Homomorphismen von den Inklusionen induziert sind.

(3) **(Ausschneidung)**: Falls $U \subset A \subset X$, so dass der Abschluss von U im Inneren von A enthalten ist, dann ist die von der Inklusion induzierte Abbildung

$$h_n(X - U, A - U) \to h_n(X, A)$$

ein Isomorphismus.

(4) **Summenaxiom**: Falls $X = \amalg_{i \in I} X_i$, so gilt

$$h_n(X) = \bigoplus_{i \in I} h_n(X_i)$$

5.33 Definition. Eine Homologie-Theorie heisst gewöhnlich, falls $h_n(\{*\}) = 0$ für $n \neq 0$.

5.34 Beispiel. Singuläre Homologie ist eine gewöhnliche Homologietheorie.

Um dies zu beweisen, müssen wir allerdings noch das Ausschneidungsaxiom überprüfen. Ehe wir das tun, wollen wir jedoch einige wichtige und interessante Folgerungen, die nur aus den Axiomen folgern, beweisen.

5.35 Satz. *Sei (X, A) homotopieäquivalent (als Paar) zu (Y, B). Dann gilt $h_n(X, A) \cong h_n(Y, B)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Proof. Sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinverser $g\colon (Y, B) \to (X, A)$. Funktoreigenschaft und Homotopieinvarianz impliziert sofort (wie vorher schon gesehen), dass

$$h_n(f)\colon h_n(X, A) \to h_n(Y, B)$$

ein Isomorphismus mit Inversem $h_n(g)$ ist. □

Um unsere Schreibweise abkürzen zu können, führen wir noch die *reduzierte Homologie* ein.

5.36 Definition. Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum. Dann gibt es genau eine (stetige) Abbildung $X \to \{*\}$.
Setze $\tilde{h}_n(X) := \ker(h_n(X) \to h_n(\{*\}))$.
Falls $\emptyset \neq A \subset X$, setze $\tilde{h}_n(X, A) := h_n(X, A)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

5.37 Lemma. *Falls h eine gewöhnliche Homologietheorie ist, gilt $h_n(*) = 0$ für $n \neq 0$, also $\tilde{h}_n(X) = h_n(X)$ für $n \neq 0$. Für $n = 0$ (und für eine Homologietheorie, die nicht gewöhnlich ist), erhält man $h_n(X) \cong \tilde{h}_n(X) \oplus h_n(*)$.*

Proof. Es muss nur die letzte Aussage bewiesen werden. Da $X \neq \emptyset$ gibt es mindestens eine (stetige) Abbildung $i\colon \{*\} \to X$, und die Verknüpfung $\{*\} \to X \to \{*\}$ ist die Identität auf X. Wir erhalten eine entsprechende Sequenz

$$h_n(*) \xrightarrow{h_n(i)} h_n(X) \xrightarrow{h_n(p)} h_n(*) \tag{5.38}$$

für die Homologiegruppen, so dass die Komposition die Identität ist. Betrachte nun die Abbildung $\tilde{h}_n(X) \oplus h_n(*) \to h_n(X)$, die durch die kanonische Inklusion und $h_n(i)$ gegeben ist. Mit Hilfe von (5.38) sieht man, dass diese Abbildung injektiv und surjektiv, also ein Isomorphismus ist. Sei nämlich $a \in h_n(X)$, dann ist $a - h_n(i)(h_n(p)(a)) \in \ker(h_n(p)) = \tilde{h}_n(X)$, demzufolge $a = (a - h_n(i)(h_n(p)(a))) \oplus h_n(i)(h_n(p)(a))$ im Bild von $\tilde{h}_n(X) \oplus h_n(*)$. Falls umgekehrt $h_n(i)(b) + c = 0$ mit $b \in h_n(*)$, $c \in \tilde{h}_n(X)$, dann $0 = h_n(p)(h_n(i)(b) + x) = h_n(p)(h_n(i)(b)) = b$, und demzufolge auch $c = 0$. □

5.39 Bemerkung. Beachte, dass die Spaltung $h_n(X) = \tilde{h}_n(X) \oplus h_n(*)$ nicht natürlich ist, da sie von der Wahl der Abbildung $i\colon \{*\} \to X$ abhängt.

Es ist leicht, nachzuprüfen, dass die Homologieaxiome "Homotopieinvarianz" und "lange exakte Paarsequenz" auch für reduzierte Homologie $\tilde{h}_*$ gelten. Dies gilt nicht für Ausschneidung (falls man ganz A wegschneidet) und für das Summenaxiom.

5.40 Satz. *Sei h_* eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(*) = G$. Sei $D^n_+ \subset S^n$ die obere Halbsphäre (also $D^n_+ \approx D^n$). Dann gilt für alle $n \geq 0$.*

$$\tilde{h}_i(D^n_+) = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z} \tag{5.41}$$

$$\tilde{h}_i(S^n) \cong \begin{cases} G & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases} \tag{5.42}$$

$$h_i(S^n, D^n_+) \cong \begin{cases} G & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases} \tag{5.43}$$

$$h_i(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} G & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases} \tag{5.44}$$

Proof. Beachte zunächst, dass D_n homotopieäquivalent zu $\{*\}$. Damit folgt sofort (5.41). Die übrigen Aussagen beweisen wir per Induktion nach n. Beachte zunächst dass S^0 die disjunkte Vereinigung von zwei Punkten ist, und D^0_+ einer dieser beiden. Ausschneidung liefert $h_i(S^0, D^0_+) \cong h_i(*)$, also (5.44) für $n = 0$.

Die lange exakte Sequenz des Paares (S^n, D^n_+) liefert

$$0 = \tilde{h}_i(D^n_+) \to \tilde{h}_i(S^n) \to h_i(S^n, D^n_+) \to \tilde{h}_{i-1}(D^n_+) = 0,$$

also $h_i(S^n) \cong h_i(S^n, D^n_+)$, so dass (5.42) und (5.44) für jedes gegebene n äquivalent sind.

Sei $U \subset D^n_+$ eine kleine Scheibe um den “Nordpol”, deren Abschluss im Inneren von D^n_+ enthalten ist. Ausschneidung impliziert

$$h_i(S^n, D^n_+) \cong h_i(S^n - U, D^n_+ - U).$$

Andererseits ist $(S^n - U, D^n_+ - U)$ homotopieäquivalent (als Paar) zu (D^n, S^{n-1}) (man muss nur den „überschüssigen“ Anteil auf den Rand S^{n-1} zusammendrücken). Mit Satz 5.35 folgt

$$h_i(S^n - U, D^n_+ - U) \cong h_i(D^n, S^{n-1}).$$

Also sind auch (5.44) und (5.43) für jedes n äquivalent.

Wir betrachten nun noch die exakte Sequenz des Paares (D^n, S^{n-1}) und erhalten

$$0 = h_i(D^n) \to h_i(D^n, S^{n-1}) \to h_{i-1}(S^{n-1}) \to h_{i-1}(D^n) = 0,$$

so dass $h_{i-1}(S^{n-1}) \cong h_i(D^n, S^{n-1})$. Das heisst, die äquivalenten Aussagen (5.43),(5.42) und (5.44) für $n-1$ implizieren die entsprechenden Aussagen für n. Dies ist der Induktionsschritt. Da wir eine (und damit alle) Aussagen bereits für $n = 0$ bewiesen hatten, folgt die Behauptung. □

5.45 Korollar. *Es gibt keine Abbildung $D^n \to S^{n-1}$ deren Einschränkung auf den Rand S^{n-1} die Identität ist.*

Proof. Diesen Beweis haben wir ganz am Anfang, nämlich in Beispiel 1.48, schon gesehen. □

5.46 Korollar. ***(Browderscher Fixpunktsatz)***
Sei $f\colon D^n \to D^n$ eine Abbildung. Dann gibt es einen Punkt $x \in D^n$ mit $f(x) = x$.

Proof. Nimm an dass $f(x) \neq x$ für jedes $x \in D^n$. Sei E^n die Scheibe vom Radius 2 in $\mathbb{R}^n$. Dann können wir eine neue Abbildung

$$g\colon E^n \to E^n : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } |x| \leq 1 \\ f(x/|x|) \cdot (2 - |x|) & \text{falls } 1 \leq |(|x) \leq 2. \end{cases}$$

Dann hat g keine Fixpunkte, weil $g(E^n) \subset (D^n)$, wo g und f übereinstimmen. Beachte, dass $g(x) = 0$ falls $|x| = 2$. Definiere jetzt

$$r\colon E^n \to 2S^{n-1} : x \mapsto 2(x - g(x))/|x - g(x)|.$$

Diese Abbildung ist stetig, und für $|x| = 2$ gilt $r(x) = 2x/|x| = x$, da dann $g(x) = 0$. Dies ist im Widerspruch zu Korollar 5.45, also muss die ursprüngliche Abbildung f einen Fixpunkt besessen haben. □

5.47 Definition. Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung, h_* eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(*) \cong \mathbb{Z}$. Definiere den *Grad* $\deg_h(f) \in \mathbb{Z}$ von f durch

$$h_n(f)(a) = \deg_h(f) \cdot a \qquad \forall a \in \tilde{h}_n(S^n).$$

Da $\tilde{h}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, und jeder Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ durch Multiplikation mit einem Element aus $\mathbb{Z}$ gegeben ist, gibt es genau eine solche Zahl $\deg_h(f)$.

Entsprechend kann man auch $\deg_h(f) \in \mathbb{Z}/n$ definieren, falls $h_0(*) \cong \mathbb{Z}/n$.

Wir werden später sehen, dass diese Definition unabhängig von der verwendeten Homologietheorie (mit $h_0(*) \cong \mathbb{Z}$) ist. Wir verwenden daher $\deg(f)$ anstelle von $\deg_h(f)$ für jede gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(*) \cong \mathbb{Z}$.

5.48 Lemma. *Seien $f, g\colon S^n \to S^n$ stetige Abbildungen. Dann gilt*

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g).$$

Proof. Funktorialität der Homologie. □

5.49 Lemma. *Sei $f\colon S^n \to S^n$ gegeben durch $f(x_0, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$. Dann gilt* $\deg(f) = -1$.

Proof. Wir wollen dies wieder per Induktion nach n beweisen. Das Dimensionsaxiom impliziert dass $h_0(*) \oplus h_0(*) \to h_0(S^0)$ ein Isomorphismus ist, wobei die Abbildung von den beiden Inklusionen induziert ist. f vertauscht die beiden Punkte, also sendet $h_0(f)$ ein Element (a, b) auf (b, a). Die Abbildung $p\colon S^0 \to \{*\}$ induziert auf Homologie eine Abbildung

$$h_0(S^0) = h_0(*) \oplus h_0(*) \colon (a, b) \mapsto a + b.$$

Es folgt dass $\tilde{h}_0(S^0) = \ker(p) = \{(a, -a) \in h_0(*) \oplus h_0(*) \mid a \in h_0(*)\} \subset h_0(S^0)$. Insbesondere gilt $h_0(f)(a, -a) = (-a, a) = -(a, -a)$, also $\deg(f) = -1$.

Für den Induktionsschritt spezifizieren wir nun, falls $n > 0$, $D^n_: = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \geq 0\} \subset S^n$ und $D^n_- := \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n \leq 0\} \subset S^n$. Beachte, dass damit

$f(D^n_+) \subset D^n_+$ und $f(D^n_-) \subset D^n_-$. Natürlichkeit der langen exakten Paarsequenz liefert folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{h}_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & h_n(S^n, D^n_+) & \xleftarrow{\cong} & h_N(D^n_-, S^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \\
\downarrow{\scriptstyle H_n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(f)=-1} \\
\tilde{h}_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & h_n(S^n, D^n_+) & \xleftarrow{\cong} & h_N(D^n_-, S^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}).
\end{array}$$

Hierbei haben wir bei der Berechnung der Homologie von S^n und (S^n, D^n_+) und (D^n, S^{n-1}) gesehen, dass die verschiedenen horizontalen Abbildungen Isomorphismen sind. Kommutativität folgt, weil die Abbildungen entweder von Inklusionen induziert sind (verwende Funktoreigenschaft) oder aus der Natürlichkeit der Randabbildung in der langen exakten Paarsequenz.

Die am weitesten rechts stehende vertikale Abbildung ist nach Induktionsvoraussetzung Multiplikation mit -1. Das Diagramm zeigt, dass dies auch für alle anderen vertikalen Abbildungen der Fall ist. Damit folgt der Induktionsschritt. □

5.50 Satz. *Für die Antipodenabbildung* $g\colon S^n \to S^n\colon v \mapsto -v$ *gilt* $\deg(g) = (-1)^{n+1}$.

Proof. Der Beweis von Lemma 5.49 funktioniert genauso für die Inversion entlang jeder anderen Koordinate in S^n. Die Komposition all dieser Inversionsabbildungen ist genau g. Da es in S^n genau $n+1$ Koordinaten gibt, ist g die Komposition von $n+1$ Abbildungen vom Grad -1. Lemma 5.48 impliziert jetzt die Behauptung. □

5.51 Satz. *Für $n > 0$ besitzt S^n genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist. Hierbei ist ein Vektorfeld ja ein Schnitt des Tangentialbündels, also eine Abbildung $X\colon S^n \to TS^n$ mit der Eigenschaft $p \circ X = \mathrm{id}_{S^n}$, wobei $p\colon TS^n \to S^n$ die kanonische Projektion ist.*

Wir identifizieren TS^n mit dem Bündel $\{(p,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid p \perp v\}$. Dann entspricht ein Vektorfeld eindeutig einer Abbildung $X\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $X(p) \perp p$. Die Behauptung ist also, dass es eine solche Abbildung X mit $X(p) \neq 0$ für alle $p \in S^n$ genau dann gibt, wenn p ungerade ist.

Proof. Falls $n = 2k+1$ ungerade ist, definiere man

$$X\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}\colon (x_0, \dots, x_{2k+1}) \mapsto (x_1, -x_0, x_3, -x_2, \dots, x_{2k+1}, -x_{2k}).$$

Es folgt sofort dass $X(p) \perp p$ und $X(p) \neq 0$ für alle $p \in S^{2k+1}$.

Sei nun andererseits $n = 2k$ gerade. Wir nehmen an, dass es ein nirgends verschwindendes Vektorfeld $X\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ gibt. Durch normieren können wir annehmen (da $X(p)$ nirgends Null ist) dass $|X(p)| = 1$ für alle $p \in S^n$. Betrachte die Homotopie

$$H\colon S^n \times [0,1] \to S^n\colon (p,t) \mapsto p \cdots \cos(\pi t) + (X(p)/\,|X(p)|) \cdot \sin(\pi t).$$

Dies liefert eine Homotopie zwischen id_{S^n} und der Antipodenabbildung $g\colon S^n \to S^n\colon p \mapsto -p$. Folglich gilt $h_n(g) = h_n(\mathrm{id}_{S^n})$, und insbesondere $\deg(g) = 1$, im Widerspruch zu 5.50, also kann es das nirgendsverschwindende Vektorfeld X nicht geben. □

5.52 Definition. Sei $f\colon S^n \to S^n$ glatt, $p \in S^n$ ein regulärer Punkt von f. Der *lokale Grad* von f an p ist definiert als

$$\deg_p(f) := \operatorname{sgn}(\det(D_{x(p)}(xAfx^{-1}))),$$

wobei $x\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von S^n um p ist, und $A \in SO(n+1)$ eine lineare orthogonale Abbildung mit Determinante 1 mit $A(f(p)) = p$ (z.B. eine geeignete Drehung). Beachte, dass A eine Abbildung $S^n \to S^n$ induziert, da A die Länge von Vektoren erhält.

5.53 Bemerkung. Es ist wichtig, dass in der Definition des lokalen Grades die um p und $f(p)$ gewählten Karten aneinander angepasst sind, was wir erreichen, indem wir sie durch "Drehung" (mit Determinante 1) aufeinander übergehen lassen. Allgemeiner braucht man Karten derselben Orientierung.

5.54 Satz. *Sei $f\colon S^n \to S^n$ glatt, $q \in S^n$ ein regulärer Wert von f. Dann gilt*

$$\deg_h(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p(f)$$

für jede gewöhnliche Homologietheorie h mit $h_0(*) = \mathbb{Z}$.

Proof. Aus Zeitgründen geben wir nur eine Skizze des Beweises. Zunächst führen wir auf den Fall zurück, dass das Urbild von q nur aus einem Punkt besteht. Wähle eine genügend kleine Umgebung D um q, die diffeomorph zu einer (abgeschlossenen) Scheibe ist. Da q regulärer Wert ist, impliziert der Satz von der inversen Abbildung, dass das Urbild dieser Scheibe (wenn sie klein genug ist) aus einer disjunkten Vereinigung von Scheiben D_p um $p \in f^{-1}(q)$ besteht. Die Abbildung $g_D\colon S^n \to D/(\partial(D)\tilde{*}) \approx S^n$, die auf dem Inneren von D die Identität ist, und jeden Punkt ausserhalb auf den Punkt $*$ abbildet, ist homotop zur Identität (indem man die Scheibe D immer mehr vergrössert).

Wir können also f durch $g_D \circ f$ ersetzen, die auf kleinen Scheiben D_p um jeden Punkt $p \in f^{-1}(q)$ ein Diffeomorphismus auf Bild ist, und das Komplement auf einen Punkt abbildet. Solch eine Abbildung faktorisiert nun als

$$f\colon S^n \to S^n \vee \cdots \vee S^n \to S^n,$$

wobei die erste Abbildung jede offene Scheibe D_p° mittels der Einschränkung von f auf jeweils verschiedene Kopien von D und dann $D/\partial D = S^n$ abbildet, und das Komplement aller Scheiben auf den gemeinsamen Verklebepunkt. Die zweite Abbildung bildet jede einzelne Kopien von S^n identisch auf S^n ab (faltet also die 1-Punkt-Vereinigung zusammen).

Man sieht leicht, dass

$$\tilde{h}_n(S^n \vee \cdots \vee S^n) \cong \tilde{h}_n(S^n) \oplus \cdots \oplus \tilde{h}_n(S^n),$$

wobei die Abbildung durch Projektion von der Projektion auf die (bzw. in umgekehrter Richtung Inklusion der) einzelnen Summanden gegeben ist.

Es folgt, dass der Grad von f die Summe der Grade der einzelnen Abbildungen auf die einzelnen Summanden der 1-Punkt-Vereinigung ist, und für jene besteht das Urbild des q entsprechenden Punktes aus jeweils nur einem Punkt.

Mittels einer weiteren Homotopie (wobei wieder alles ausserhalb einer kleinen Umgebung von p auf einen (gegenüberliegenden) Punkt gedrückt wird), kann man erreichen, dass f "linear" wird. Damit ist die Berechnung des Grades dann direkt möglich. Dabei benutzt man Lemma 5.49. □

5.55 Definition. Sei $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Die 1-Punkt-Vereinigung von X und Y entlang x_0 und y_0 ist definiert als

$$X \vee Y := (X \amalg Y)/(x_0 \sim y_0).$$

5.56 Satz. *Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $f\colon M \to N$ stetig. Dann gibt es eine differenzierbare Abbildung $g\colon M \to N$ welche homotop zu f ist.*

Proof. Da wir uns momentan nicht mit Differentialtopologie beschäftigen wollen, wirden der Satz hier nicht bewiesen. □

5.57 Korollar. *Seien h und H zwei gewöhnliche Homologietheorien mit $h_0(*) \cong H_0(*) \cong \mathbb{Z}$, $f\colon S^n \to S^n$ stetig. Dann gilt $\deg_h(f) = \deg_H(f)$.*

Proof. Nach Satz 5.56 können wir eine zu f homotope glatte Abbildung $g\colon S^n \to S^n$ finden. Wegen Homotopieinvarianz gilt $\deg_h(f) = \deg_h(g)$ und $\deg_H(f) = \deg_H(g)$. Wähle nun einen regulären Wert q von g. Dann gilt

$$\deg_h(g) = \sum_{q \in g^{-1}(q)} \deg_p(g) = \deg_H(g),$$

da der mittlere Ausdruck nicht von der Homologietheorie abhängt. □

5.58 Bemerkung. Sei allgemeiner H_* eine beliebige gewöhnliche Homologietheorien. Man kann den Abbildungsgrad einer Abbildung $f\colon S^n \to S^n$ definieren als den auf $\tilde{H}_n(S^n) \cong H_0(*)$ induzierten Homomorphismus, und die durchgeführten Berechnungen zeigen, dass dieser Homomorphismus gegeben ist durch Multiplikation mit dem vorher definierten Abbildungsgrad.

Es ist oftmals nützlich, die Homologie eines Raumes aus der Homologie von Teilstücken zu berechnen. Dies kann man mit Hilfe der Mayer-Vietoris Sequenz durchführen.

5.59 Satz. *Seien A, B Teilräume des topologischen Raums X, und X die Vereinigung des Inneren von A und des Inneren von B. Sei h eine Homologietheorie, so dass Ausschneidung $h_n(X - U, A - U) \cong h_n(X, A)$ erfüllt ist für beliebige Teilmengen U mit $\overline{U} \subset A^\circ$. Dann gibt es eine lange exakte Mayer-Vietoris Sequenz*

$$\to h_{n+1}(X) \to h_n(A \cap B) \xrightarrow{h_n(i_A) \oplus h_n(i_B)} h_n(A) \oplus h_n(B)$$
$$\xrightarrow{h_n(j_A) - h_n(j_B)} h_n(X) \to h_{n-1}(A \cap B) \to$$

Hier sind i_A, i_B und j_A, j_B die offensichtlichen Inklusionen. Diese Sequenz ist natürlich für Abbildungen $f\colon X \to Y$ mit $f(A) \subset C$, $f(B) \subset D$, falls Y die Vereinigung von $\int(C)$ und $\int(D)$ ist.

Proof. Beachte zunächst dass $A - B = X - B$, und der Abschluss hiervon ist $X - \int(B)$, welches im Inneren von A liegt. Wegen Ausschneidung gilt also $h_n(X, A) \cong h_n(X - (A - B), A - (A - B)) = h_n(B, A \cap B)$. Entsprechend $h_n(A, A \cap B) \cong h_n(X, B)$.

Wir können nun die langen exakten Sequenzen der Paare (X, A), (X, B), $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ zu folgendem kommutativen Zopf verflechten (wobei wir $h_n(A, A \cap B)$ durch $h_n(X, B)$ ersetzen, und $h_n(B, A \cap B)$ durch $h_n(X, A)$)

$$\begin{array}{ccccccc}
h_{i+1}(X, A) & \longrightarrow & h_i(A) & \longrightarrow & h_i(X, B) & \longrightarrow & h_{i-1}(B) \\
& h_i(A \cap B) & & h_i(X) & & h_{i-1}(A \cap B) & \\
h_{i+1}(X, B) & \longrightarrow & h_i(B) & \longrightarrow & h_i(X, A) & \longrightarrow & h_{i-1}(A).
\end{array}$$

Schräg benachbarte Gruppen sind durch schräg von links nach rechts laufende Pfeile verbunden. Diagrammjagt zeigt nun, dass die obige Mayer-Vietoris Sequenz exakt ist, wobei die Randabbildung gegeben ist durch

$$h_n(X) \to h_n(X, A) = h_n(A, A \cap B) \to h_{n-1}(A \cap B).$$

Diese Abbildung stimmt mit der entsprechenden Abbildung, wobei A und B vertauscht wurden, überein.

Natürlichkeit folgt sofort aus dieser Definition der Randabbildung, die ja aus natürlichen Homomorphismen zusammengesetzt ist. □

5.60 Satz. *Der obige Beweis zeigt auch, dass man die Mayer-Vietoris Sequenz für jede beliebige Homologietheorie h_* erhält, falls die Zerlegung $X = A \cup B$ folgende (zueinander äquivalenten) Bedingungen erfüllt:*

$$h_k(A, A \cap B) \cong h_k(X, B) \qquad h_k(B, A \cap B) \cong h_k(X, A) \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

wobei die Isomorphismen durch die Inklusion induziert sein müssen. Beachte, dass dann auch nicht erfüllt sein muss, dass X die Vereinigung schon des Inneren von A und des Inneren von B ist.

Wir wollen (zur Illustration) zeigen, wie man die Mayer-Vietoris Sequenz von unreduzierter auf reduzierte Homologie übertragen kann.

5.61 Satz. *Sei h_* eine Homologietheorie.*

Sei $X = A \cup B$ eine Zerlegung eines Raums, für die die Mayer-Vietoris Sequenz exakt ist. Sei $A \cap B \neq \emptyset$. Dann ist auch folgende reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz exakt:

$$\to \tilde{h}_{n+1}(X) \to \tilde{h}_n(A \cap B) \xrightarrow{\tilde{h}_n(i_A) \oplus \tilde{h}_n(i_B)} \tilde{h}_n(A) \oplus \tilde{h}_n(B)$$
$$\xrightarrow{\tilde{h}_n(j_A) - \tilde{h}_n(j_B)} \tilde{h}_n(X) \to \tilde{h}_{n-1}(A \cap B) \to$$

Proof. Wir haben eine Zerlegung des Punktraums $\{*\}$ in zwei nichtleere Teilmengen $\{*\}$ und $\{*\}$, deren Schnitt wieder $\{*\}$ ist.In dieser Situation sind immer die Voraussetzungen für die Mayer-Vietoris Sequenz erfüllt. Ausserdem haben wir eine (kanonische) Abbildung $X \to \{*\}$, die mit der Zerlegung (auf triviale Weise) verträglich ist. Beachte, dass die reduzierte Homologie als der Kern der dieser Abbildung (auf Homologie) definiert ist. Beachte ausserdem dass, da keiner der beteiligten Räume leer ist, alle Abbildungen auf $h_i(*)$ surjektiv sind. Zusammengefasst erhalten wir also folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & K_{n+1} \arrow[d] & K_n \arrow[d] & K_{n-1} \arrow[d] & \\
 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & A_n \arrow[r] \arrow[d] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
 \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & B_n \arrow[r] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Die mittlere Zeile ist die nach Voraussetzung exakte unreduzierte Mayer-Vietoris Sequenz von $X = A \cup B$, die untere Zeile die exakte Mayer-Vietoris Sequenz von $\{*\} = \{*\} \cup \{*\}$. Wie gerade bemerkt, sind alle Spalten exakt, also insbesondere die K_n (die reduzierten Homologiegruppen) Untergruppen der A_n. Standard-Diagrammjagt zeigt nun, dass in solch einer Situation die Abbildung $A_n \to A_{n-1}$ tatsächlich K_n nach K_{n-1} abbildet, d.h., dass die K_n einen Unterkomplex der A_n bilden. Diagrammjagt zeigt ausserdem, dass dieser Komplex exakt ist. Dies ist die einzige Stelle, an der man Surjektivität der Abbildung $A_n \to B_n$ benötigt (allerdings wird sie hier wirklich benötigt). $\square$

5.62 Bemerkung. Die Zerlegung in eine disjunkte Vereinigung zeigt, dass man die Voraussetzung $A \cap B \neq \emptyset$ in der Mayer-Vietoris Sequenz für reduzierte Homologie braucht. Aus diesem Grund wird manchmal $\tilde{h}_n(\emptyset) := h_{n+1}(*)$ definiert. Damit kann dieses Problem gelöst werden.

Die Standardeinbettung von S^n in $\mathbb{R}^{n+1}$ zerlegt diesen in genau zwei Komponenten, eine beschränkte und eine unbeschränkte. Wir werden nun mittels Homologietheorie zeigen, dass dies für jede beliebige Einbettung der Fall ist, und werden sogar alle Homologiegruppen des Komplements ausrechnen. Wir benötigen dazu allerdings noch einige etwas stärkere Eigenschaften unserer Homologietheorie (die in der Regel erfüllt sind).

5.63 Definition. Sei $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ eine Kette von Inklusionen. Wir setzen $X := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Definiere auf X eine Topologie dadurch, dass $U \subset X$ genau dann offen ist, wenn $U \cap X_i$ offen ist für jedes $i \in \mathbb{N}$. Mit dieser Topologie heisst X der *direkte Limes* der Kette $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

5.64 Definition. Eine Homologietheorie h_* *ist verträglich mit direkten Limiten*, falls für jeden direkten Limes $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ mit $X_i \subset X$ offen für alle i folgende zwei Aussagen wahr sind:

(1) für jedes $a \in h_n(X)$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ und $a' \in h_n(X_j)$ so dass

$$h_n(i_j)(a') = a.$$

(2) Falls $a \in h_n(X_j)$ mit $h_n(i_j)(a) = 0$, dann existiert $k > j$ mit $h_n(i_{j,k})(a) = 0$.

Hierbei sind $i_j \colon X_j \to X$ und $i_{j,k} \colon X_j \to X_k$ die kanonischen Inklusionen. Die Bedingung sagt dass die Homologie von X der direkte Limes der Homologie der X_j ist.

5.65 Satz. *Singuläre Homologie ist mit direkten Limiten verträglich.*

Proof. Sei $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ ein direkter Limes, und alle X_i offen in X. Sei $\sigma \colon \Delta^k \to X$ ein singulärer Simplex. Da Δ^k kompakt ist, ist auch $\sigma(\Delta^k)$ kompakt. Die X_i bilden eine offene Überdeckung von X, $\sigma(\Delta^k)$ liegt also schon in der Vereinigung von endlich vielen dieser X_i. Da es sich um eine aufsteigende Kette handelt, gilt $\mathrm{im}(\sigma) \subset X_i$ für ein geeignetes $i \in \mathbb{N}$. Das entsprechende Argument gilt natürlich auch für Linearkombinationen und zeigt, dass $h_k(X) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} h_k(i_j)(h_k(X_j))$.

Falls andererseits das Bild von $a \in H_k(X_j)$ in $H_k(X)$ Null ist, gibt es eine endliche singuläre $(k+1)$-Kette β, deren Rand gerade a ist. Das gleiche Argument wie eben impliziert (wegen Kompaktheit der Standardsimplizes), dass β bereits in X_r liegt für genügend grosses $r > j$, also das Bild von a bereits in $H_k(X_r)$ Null ist. □

5.66 Satz. *Sei h eine Homologietheorie, die mit direkten Limiten verträglich ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und X ein kompakter Raum mit folgender Eigenschaft: für jede Einbettung $f \colon X \to S^n$ gilt*

$$\tilde{h}_k(S^n - f(X)) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dann hat $X \times [0,1]$ dieselbe Eigenschaft.

Proof. Sei $f \colon X \times [0,1] \to S^n$ eine Einbettung. Dann sind insbesondere $f_t \colon X \times \{t\} \to S^n$ Einbettungen, auf die wir die Voraussetzung anwenden können. Sei $a \in \tilde{h}_k(S^n - f(X \times [0,1]))$. Für jedes $t \in [0,1]$ ist hat man folgende Kette von Inklusionen:

$$S^n - f(X \times [0,1]) \subset S^n - f(X \times [t-1/n, t+1/n]) \subset \cdots S^n - f_t(X).$$

Und der letzte Raum ist der Limes dieser Kette (wobei jeder Teilraum offen in $S^n - f_t(X)$ ist). Nach Voraussetzung ist das Bild von a in $\tilde{h}_k(S^n - f_t(X))$ Null. Also, da unsere Homologietheorie mit direkten Limiten verträglich ist, ist das Bild von a Null in $h_k(S^n - f(X \times [t-1/n_t, t+1/n_t]))$ für geeignetes $n_t > 0$. Nun ist $[0,1]$ kompakt, also gibt es endlich viele $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_l = 1$), so dass jedes $[t_i, t_{i+1}]$ in einem $[t-1/n_t, t+t/n_t]$ enthalten ist. Wir haben dann folgende Kette von Abbildungen auf Homologie:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_k(S^n - f(X \times [0,1])) \to \tilde{h}_k(S^n - f(X \times [t-1/n_t, t+1/n_t]))\\ \to \tilde{h}_k(S^n - f(X \times [t_i, t_{i+1}])).\end{aligned}$$

Da das Bild von a in der mittleren Gruppe verschwindet, impliziert Natürlichkeit, dass auch das Bild von a in der rechten Homologiegruppe verschwindet.

. Setze $I_r := [0, t_r] \subset [0,1]$ Wir zeigen nun per Induktion, dass das Bild von a in $\tilde{h}_k(S^n - f(X \times I_r))$ Null ist für jedes r. Da $I_l = [0,1]$, folgt damit dass a selbst schon Null ist, also die Behauptung.

Trivialerweise ist die Behauptung richtig ist für $r = 1$. Für den Induktionsschritt betrachte die Mayer-Vietoris Sequenz

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{k+1}(S^n - f_{t_r}(X)) &\to \tilde{h}_k(S^n - f(X \times I_{r+1})) \\ &\to \tilde{h}_k(S^n - f(X \times I_r)) \oplus \tilde{h}_k(S^n - f(X \times [t_r, t_{r+1}]))\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist die erste Gruppe Null. Dass Bild von a in den Gruppen rechts ist Null entweder nach Induktionsvoraussetzung oder nach Wahl der t_r, wie oben nachgewiesen. Damit folgt der Induktionsschritt.

Wir müssen allerdings noch nachprüfen, dass wir die Mayer-Vietoris Sequenz wirklich anwenden durften. Wir müssen also zeigen, dass $h_k(S^n - f(X \times \{t_r\}), S^n - f(X \times [0, t_r])) \cong h_k(S^n - f(X \times [t_r, t_{r+1}]), S^n - f(X \times [0, t_{r+1}]))$. Dies folgt aber sofort mit Ausschneidung, da die ausgeschnittene Teilmenge $f(X \times (t_r, t_{r+1}])$ abgeschlossen ist im hier zu betrachtenden Totalraum $S^n - f(X \times \{t_r\})$. Andererseits ist $S^n - f(X \times [t_r, t_{r+1}])$ offen, also gilt sicherlich $\overline{U} \subset A^\circ$. Entsprechend für das zweite zu betrachtende Paar. □

5.67 Korollar. *Sei $f\colon D^k \to S^n$ eine Einbettung. Dann gilt $\tilde{H}_k(S^n - f(D^k)) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.*

5.68 Satz. *Sei $f\colon S^r \to S^n$ eine Einbettung. Dann gilt*

$$\tilde{H}_i(S^n - f(S^r)) = \begin{cases} \mathbb{Z}; & i = n - r - 1 \\ 0; & i \neq n - r - 1. \end{cases}$$

$S^n - f(S^r)$ hat also die Homologie einer $(n - r - 1)$-Sphäre.

Proof. Wir beweisen dies per Induktion nach r. Im Fall $r = 0$ besteht $f(S^0)$ aus zwei disjunkten Punkten. Also $S^n - f(S^0) \approx D^n - \{0\}$. Dieser Raum ist homotopieäquivalent zu S^{n-1}, und die Behauptung folgt.

Für den Induktionsschritt zerlegen wir wie üblich $S^r = D^r_+ \cup_{S^{r-1}} D^r_-$. Es folgt $(S^n - f(D^r_+)) \cup (S^n - f(D^r_-)) = S^n - f(S^{r-1})$, und für den Schnitt $(S^n - f(D^r_+)) \cap (S^n - f(D^r_-)) = S^n - f(S^r)$. Beachte ausserdem, da $D^n_\pm$ kompakt, ist auch $f(D^n_\pm)$ kompakt, also abgeschlossen, also ist $S^n - f(D^r_\pm)$ offen, und wir können die Mayer-Vietoris Sequenz anwenden. Diese liefert

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{i+1}(S^n - f(D^r_+)) \oplus \tilde{H}_{i+1}(S^n - f(D^r_-)) &\to \tilde{H}_{i+1}(S^n - f(S^{r-1})) \to \\ \tilde{H}_i(S^n - f(S^r)) &\to \tilde{H}_i(S^n - f(D^r_+)) \oplus \tilde{H}_i(S^n - f(D^r_-))\end{aligned}$$

Aus Korollar 5.67 folgt, dass die aussen stehenden Gruppen Null sind, also sind die beiden in der Mitte stehenden Gruppen isomorph, und der Induktionsschritt folgt. □

5.69 Definition. Sei X ein topologischer Raum mit Teilmenge $A \subset X$. Der Rand von A in X ist Menge aller $x \in X$, so dass für jede offene Umgebung U von x sowohl $A \cap U \neq \emptyset$, als auch $(X - A) \cap U \neq \emptyset$.

5.70 Korollar. *Falls $F\colon S^n \hookrightarrow S^n$ eine Einbettung, dann zerfällt das Komplement des Bildes in genau 2 Komponenten U, V, deren Rand jeweils $f(S^{n-1})$ ist. Beide Komponenten haben die Homologie eines Punktes.*

Proof. $\tilde{H}_0(S^n - f(S^{n-1})) \cong \mathbb{Z} \implies H_0(S^n - f(S^{n-1})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_i(S^n - f(S^{n-1})) = 0$ für $i \neq 0$. Wir erhalten also zwei Wegekomponenten, deren Homologie die eines Punktes ist. Da $f(S^{n-1})$ kompakt, ist diese Teilmenge abgeschlossen, also $S^n - f(S^{n-1})$ offen. Für offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit ist zusammenhängend und wegzusammenhängend äquivalent.

Da $S^n - f(S^{n-1})$ gilt ausserdem $\partial U, \partial V \subset f(S^{n-1})$. Zur Erinnerung: der Rand einer Teilmenge A eines topologischen Raums X besteht aus all den Punkten von X für die jede offene Umgebung sowohl Punkte aus A als auch aus $X - A$ enthält.

Sei nun $p \in S^{n-1}$, und nimm an $f(p) \notin \partial U$. Dann gibt es eine offene Umgebung W von $f(p)$ so dass $W \cap U = \emptyset$. Sei $D \subset S^{n-1}$ eine kleine abgeschlossene Scheibe um p, so dass $f(p) \subset W$. Nun gilt $S^{n-1} - D \approx D^{n-1}$, also hat nach Korollar 5.67 $Y := S^n - f(S^{n-1} - D)$ die Homologie eines Punktes, ist insbesondere wegzusammenhängend. Andererseits zerfällt Y als disjunkte Vereinigung von U und $(V \cup W) \cap Y$, und diese Mengen sind beide offen. Dieser Widerspruch zeigt, dass $f(p) \in \partial U$, und genauso $f(p) \in \partial V$. □

5.71 Korollar. *Falls $f\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung und $n \geq 2$, dann zerfällt das Komplement von f in genau zwei Komponenten, eine davon beschränkt mit der Homologie eines Punktes, die andere unbeschränkt mit der Homologie von S^{n-1}.*

Proof. Es gilt $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Korollar 5.70 sagt dass $S^n - f(S^{n-1})$ in zwei Komponenten U und V zerfällt. Nimm an $\infty \in U$. Dann zerfällt $\mathbb{R}^n - f(S^{n-1})$ in $U - \{\infty\}$ und V. U enthält eine Umgebung von ∞, ist also unbeschränkt. V ist disjunkt von einer Umgebung von ∞, also disjunkt von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \geq R\}$ für genügend grosses R, also beschränkt. Ausserdem hat V die Homologie eines Punktes.

Da $\tilde{H}_i(U) = 0$, folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares $U, U - \{\infty\}$, dass $\tilde{H}_k(U - \{\infty\}) \cong H_{k+1}(U, U - \{\infty\})$. Letzteres ist wegen Ausschneidung isomorph zu $\tilde{H}_{k+1}(D^n, D^n - \{0\}) \cong \tilde{H}_k(D^n - \{0\}) \cong \tilde{H}_k(S^{n-1})$. Hier benutzen wir die lange exakte Sequenz des Paares $D^n, D^n - \{0\}$ und Homotopieinvarianz. Die Behauptung folgt. □

5.72 Satz. ***Gebietsinvarianz***
Seien M, N zwei topologische n-Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ stetig und injektiv. Dann ist f eine offene Abbildung, also $f(U) \subset N$ offen für jedes offene $U \subset M$.

Proof. Es genügt, $\overline{U} \approx D^n$ und $U \approx (D^n)^\circ$ anzunehmen, und ausserdem $f(U) \subset V \approx \mathbb{R}^n$ (jede offene Menge in M ist Vereinigung solcher Mengen, also ihr Bild Vereinigung der entsprechenden Bildmengen).

Wir haben also jetzt nach Einschränken und Anwenden der Homöomorphismen $f\colon D^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \subset S^n$. Da D^n und S^n kompakt und Hausdorff, ist diese injektive Abbildung eine Einbettung. Aus Satz 5.67 folgt dass $S^n - f(D^n)$ zusammenhängend und offen ist. Wegen Korollar 5.70 zerfällt $S^n - f(S^{n-1})$ in zwei offene Komponenten U und V. Nimm an $S^n - f(D^n) \subset U$. Es gilt auch, dass $S^n - f(S^{n-1})$ die disjunkte Vereinigung von $f((D^n)^\circ)$ und von $S^n - f(D^n)$ ist. Also muss $f((D^n)^\circ)$ nicht nur in V enthalten sein, sondern gleich der offenen Teilmenge V. □

Wir sind jetzt in der Situation, ohne grosse Mühe beweisen zu könnnen, dass der Rand einer Mannigfaltigkeit eine Untermannigfaltigkeit ist:

Beweis von Satz 2.18:. Wir beweisen zunächst die zweite Aussage. Sei also M eine Mannigfaltigkeit mit Rand, $p \in \partial M$ und $x\colon U_x \to V_x \subset \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ eine Karte mit $p \in U_x$ und $x(p) \in \{(0, x_2, \ldots, x_m)\}$. Sei $y\colon U_y \to V_y \subset \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ eine zweite Karte mit $p \in U_y$. Wir müssen zeigen dass $y(p) \in \{(0, x_2, \ldots, x_m)\}$. Indem wir $U_x \cap U_y$ betrachten, könnnen wir annehmen, dass $U_x = U_y$. Es liefert also $y \circ x^{-1}\colon V_x \to V_y$ einen Homöomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^m_{\geq 0}$. Für jede offenen Umgebung W von $x(p)$ gilt: $W \simeq W - \{x(p)\}$ (betrachte den Schnitt eines genügend kleinen Balls um $x(p)$ mit $\mathbb{R}^m_{\geq 0}$, wichtig ist hier natürlich, dass $x(p)$ am Rand von $\mathbb{R}^m_{\geq 0}$ liegt, die Homotopieäquivalenz lässt das Äussere dieses Balls fest).

Sei andererseits $q \in \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_1 > 0\} \cap V_y$. $W := B_\epsilon(q) \subset V_y$ für $\epsilon > 0$ genügend klein, und $B_\epsilon(q) \simeq \{*\}$, während $B_\epsilon(q) - \{q\} \simeq S^{n-1}$. Da $H_{n-1}(S^{n-1})$ nicht isomorph zu $H_{n-1}(*)$, gilt für die offenen Umgebung W von q: $W \not\simeq W - \{q\}$. Da keine offene Umgebung von $y(p)$ diese Eigenschaft hat (als homöomorphes Bild einer entsprechenden offenen Umgebung von $x(p)$), folgt $y(p) \in \{(0, x_2, \ldots, x_m)$, wie zu zeigen war.

Es folgt jetzt sofort, dass die Einschränkungen der Karten von M auf ∂M Karten von ∂M liefern (mit der Identifikation $\mathbb{R}^{m-1} = \{(0, x_2, \ldots, x_m) \subset \mathbb{R}^m\}$), welche ∂M zu einer $(m-1)$-Mannigfaltigkeit machen. Diese Mannigfaltigkeit ist glatt, falls M glatt war, da die Einschränkung einer glatten Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, welche $\mathbb{R}^{m-1}$ auf $\mathbb{R}^{m-1}$ abbildet, auf die Untermenge $\mathbb{R}^{m-1}$ ebenfalls glatt ist (und die entsprechende Aussage gilt für offene Untermengen). □

5.3 Suspension

5.73 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Der *Kegel* CX über X ist der Raum $CX := X \times [0,1]/X \times \{0\}$ (alle Punkte es einen Deckels werden identifiziert).

Die *Suspension* ΣX von X ist definiert als $\Sigma X := X \times [-1,1]/\sim$, wobei $(x,1) \sim (y,1)$ und $(x,-1) \sim (y,-1)$ für jedes $x, y, \in X$. D.h. hier wird der Deckels des Zylinders zu einem Punkt und der Boden zu einem zweiten Punkt identifiziert.

5.74 Beispiel. $\Sigma X \approx CX \cup_X CX$. $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$.

5.75 Bemerkung. Beachte, dass jede Abbildung $f\colon X \to Y$ eine kanonische Abbildung $Cf\colon CX \to CY$ und $\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma Y$ induziert. Auf diese Weise wird “kegeln” oder “suspendieren” ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume zur Kategorie der topologischen Räume.

5.76 Lemma. *Für jeden Raum X ist CX zusammenziehbar, also homotopieäquivalent zum Punkt.*

Proof. Die Homotopie zwischen der Identität auf CX und der Abbildung auf einen Punkt (den Kegelpunkt) ist gegeben durch

$$CX \times [0,1] \to CX\colon ((x,t),s) \mapsto (x, st)$$

□

5.77 Satz. *Sei h_* eine Homologietheorie. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus*
$$\sigma_n(X)\colon \tilde h_n(X) \to \tilde h_{n+1}(\Sigma X).$$

Proof. Es gilt ja $\Sigma X \approx C^+X \cup X \mathbb{C}^- X$. Dabei ist $h_k(C^-X, X) \to h_k(\Sigma X, C^+X)$ wegen Ausschneidung und Homotopieäquivalenz ein Isomorphismus, genauso $h_k(C^+X, X) \to h_k(\Sigma X, C^-X)$. Es folgt, dass wir (ohne weitere Voraussetzungen an h_*) folgende lange exakte Mayer-Vietoris Sequenz erhalten:
$$\tilde h_{k+1}(C^-X) \oplus \tilde h_{k+1}(C^+X) \to \tilde h_{k+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\delta_n} \tilde h_k(X) \to \tilde h_k(C^-X) \oplus \tilde h_k(C^+X).$$

Wegen Lemma 5.76 sind die äusseren Gruppen Null, also erhält man den gewünschten Isomorphismus $\sigma_k(X)$ als inverses der Randabbildung δ_k. Wegen der Natürlichkeit von δ ist auch σ natürlich. □

5.4 Singuläre Homologie: die fehlenden Axiome

Nachdem wir so lange mit den Axiomen einer Homologietheorie herumgerechnet haben, sollten wir endlich beweisen, dass es wirklich eine Homologietheorie gibt.

5.78 Satz. *Singuläre Homologie erfüllt das starke Ausschneidungsaxiom, d.h. falls $B \subset A \subset X$ mit $\overline{(B)} \subset A^\circ$, dann induziert die Inklusion Isomorphismen*
$$H_k(X-B, A-B) \xrightarrow{\cong} H_k(X, A).$$

Proof. Wir werden nicht alle Details angeben, sondern nur die Idee des Beweises angeben.

Der relative singuläre Kettenkomplex ist definiert als Quotient $C_k(X,A) := C_k(X)/C_k(A)$, entsprechend $C_k(X-B, A-B) = C_k(X-B)/C_k(A-B)$. Wenn jeder singuläre Simplex entweder ganz in $X-B$ läge oder ganz in B, dann wäre $C_k(X) = C_k(X-B) \oplus C_k(B)$, und die Inklusion $C_k(X-B, A-B) \to C_k(X,A)$ ein Isomorphismus (da der Summand $C_k(B)$ sowieso herausdividiert wird).

Wir werden nun versuchen, bis auf Homologie jede Kette entweder in ganz A oder ganz in $X-B$ zu realisieren, um dann ein ähnliches Argument anzuwenden. Dies geschieht durch Unterteilen.

Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X, so dass $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U^\circ = X$. Ein singulärer Simplex $\sigma\colon \Delta^n \to X$ heisst *$\mathcal{U}$-klein*, falls $\operatorname{im}(\sigma) \subset U$ für ein $U \in \mathcal{U}$. Definiere $C_k^{\mathcal{U}}(X)$ und $C_k^{\mathcal{U}}(X,A)$ wie $C_k(X)$ und $C_k(X,A)$, nur dass jetzt nur $\mathcal{U}$-kleine Simplizes zugelassen werden.

5.79 Lemma. *Die Homologie von $C_*^{\mathcal{U}}(X)$ und $C_*(X)$ ist isomorph, und entsprechend für $C_*^{\mathcal{U}}(X,A)$ und $C_*(X,A)$.*

Proof. **(Idee)**
Wir können jeden singulären Simplex $\sigma\colon \Delta^k \to X$ so zerlegen,(d.h. in eine homologe Summe von Simplizes verwandeln), dass alle Teilstücke $\mathcal{U}$-klein werden. Es folgt, dass $H_*^{\mathcal{U}}(X) \to H_*(X)$ surjektiv ist. Das Argument gilt genauso für eine Kette, deren Rand a $\mathcal{U}$-klein ist (d.h. $[a]$ liegt im Kern der Abbildung $H_*^{\mathcal{U}}(X) \to H_*(X)$). Also ist a Rand auch einer $\mathcal{U}$-kleinen Kette, d.h. $[a] = 0 \in H_*^{\mathcal{U}}(X)$, also ist $H_*^{\mathcal{U}}(X) \to H_*(X)$ auch injektiv.

Entsprechende Argumente kann man auch im relativen Fall anwenden. □

Für die Ausschneidung setze nun $\mathcal{U} := \{A, X - B\}$. Da $\overline{B} \subset A^\circ$ folgt $A^\circ \cup (X - B)^\circ = A^\circ \cup X - \overline{B} = X$. Wegen Lemma 5.79 haben wir also einen Isomorphismus $H_*^{\mathcal{U}}(X, A) \to H_*(X, A)$. Beachte, dass wir Faktorisierungen

$$C_*(X - B) \to C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*(X) \text{ und } C_*(A - B) \to C_*^{|mathcalU}(A) \to C_*(A),$$

also auch $C_*(X - B, A - B) \to C_*^{\mathcal{U}}(X, A) \to C_*(X, A)$ erhalten (hier ist $C_*^{\mathcal{U}}(A) = C_*(A)$). Beachte nun, dass $C_*^{\mathcal{U}} = C_*(X - B) + C_*(A)$ (diese Summe ist natürlich nicht direkt). Ausserdem gilt offensichtlich $C_*(A - B) = C_*(A) \cap C_*(X - B)$. Der Isomorphiesatz sagt uns also, dass

$$C_*(X - B)/C_*(A - B) \to C_*^{\mathcal{U}}(X)/C_*(A)$$

schon auf Kettenkomplex-Niveau ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist die induzierte Abbildung auf Homologie ein Isomorphismus.

Also zerlegt sich $H_*(X - B, A - B) \to H_*(X, A)$ also Komposition von zwei Isomorphismen

$$H_*(X - B, A - B) \to H_*^{\mathcal{U}}(X, A) \to H_*(X, A)$$

und ist demzufolge selbst ein Isomorphismus. □

6 CW-Komplexe und zelluläre Homologie

6.1 Definition. Ein *CW-Komplex* ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Filtrierung $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots$, so dass $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i = X$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) X hat die Limestopologie der Vereinigungskette, d.h. $U \subset X$ ist offen genau wenn $U \cap X_i \subset X_i$ offen ist für alle $i \in \mathbb{N}$.

(2) Für jedes $n \geq 0$ geht X_n aus X_{n-1} durch Ankleben von n-Zellen hervor, d.h. es existiert ein Homöomorphismus

$$X_n \approx X_{n-1} \cup_{f_n} \amalg_{i \in I_n} D_i^n.$$

Hierbei ist I_n eine beliebige Indexmenge, jedes $D_i^n \approx D^n$, und $f = \amalg_{i \in I_n} q_i^n \colon \amalg_{i \in I_n} S^{n-1} \to X^{n-1}$ eine beliebige stetige Abbildung. D.h. jede Scheibe D^n wird entlang ihres Rands mit einer völlig beliebigen stetigen Abbildung and X^{n-1} angeklebt.

6.2 Bemerkung. Die Homöomorphismen sind nicht teil der Struktur, wohl aber die Filtrierung.

6.3 Definition. Sei A ein topologischer Raum. Ein *relativer CW-Komplex* (X, A) wird genauso definiert wie ein (absoluter) CW-Komplex, nur setzen wir $X_{-1} = A$.

6.4 Beispiel. $X^{(0)} = \cdots = X^{(n-1)} = \{*\}$, $X^{(n)} = S^n$ gibt S^n die Struktur eines CW-Komplexes mit nur zwei Zellen, einer in Dimension Null und einer in Dimension n.

$X^{(0)} = S^0$, $X^{(1)} = S^1, \ldots, X^{(n)} = S^n$, mit $I_k = \{1, 2\}$, und $q^k_{1,2} = \mathrm{id}\colon S^k \to S^k$ gibt S^n ebenfalls die Struktur eines CW-Komplexes, allerdings mit je zwei Zellen in jeder Dimension ($\leq n$). Beachte, dass diese CW-Komplexe *nicht* isomorph sind, da sie verschiedene Filtrierungen haben.

6.5 Definition. (1) Die q^n_i heissen *anheftenden Abbildungen.*

(2) Die Wegekomponenten von $X^{(n)} - X^{(n-1)}$ heissen die *offenen n-Zellen* von X (jede ist homöomorph zu $(D^n)^\circ$). Beachte, dass dies im allgemeinen *keine* offenen Teilmengen von X sind.

(3) Der Abschluss jeder offenen Zelle in X ist eine *abgschlossenen Zelle.*

(4) Der Rand einer Zelle ist das Komplement einer offenen Zelle in ihrem Abschluss.

(5) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von CW-Komplexen heisst zellulär, falls

$$f(X_n) \subset Y_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beachte, dass dies von der CW-Struktur abhängt.

6.6 Beispiel. Wir können $\mathbb{C}P^n$ eine CW-Struktur mit $X^{(2k)} = X^{(2k+1)} = \mathbb{C}P^k$ geben. Es gibt jeweils genau eine $2k$-Zelle. Die anheftende Abbildung q_{2k} ist gegeben durch die Einschränkung auf S^{2k-1} von

$$Q_{2k}\colon D^{2k} \subset \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{C}P^k\colon z = (z_0, \ldots z_{k-1}) \mapsto (z_0 : \cdots : z_{k-1} : 1 - |z|).$$

Die Abbildung Q_{2k} induziert gleich noch den benötigten Homöomorphismus $X^{(2k)} \to \mathbb{C}P^k$.

6.1 Pushouts von Räumen

6.7 Definition. Seien $f_1\colon X_0 \to X_1$ und $f_2\colon X_0 \to X_2$ stetige Abbildungen. Ein *pushout* von f_0 und f_1 besteht aus einem topologischen Raum X und stetigen Abbildungen $F_1\colon X_1 \to X$, $F_2\colon X_2 \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $F_1 \circ f_1 = F_2 \circ f_2$

(2) Zu jedem topologischen Raum Z und Abbildungen $g_1\colon X_1 \to Z$, $g_2\colon X_2 \to Z$ mit $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ existiert genau eine Abbildung $g\colon X \to Z$ mit $g \circ F_1 = g_1$, $g \circ F_2 = g_2$.

6.8 Satz. *Pushouts existieren und sind eindeutig.*

Proof. Eindeutigkeit folgt sofort aus der universellen Eigenschaft. Für die Existenz definiere $X := X_1 \amalg X_2/\sim$, wobei die Äquivalenzrelation erzeugt wird durch $f_1(a) \sim f_2(a)$ für alle $a \in X_0$. □

6.9 Bemerkung. Wir werden meist an der Situation interessiert sein, bei der f_1 eine Einbettung ist (oder die Inklusion eines Unterraums). Dann klebt man den Raum X_1 entlang des Unterraums X_0 mittels f_2 an den Raum X_2.

6.10 Beispiel. Das pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \{*\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_0} & & \Big\downarrow \\ X \times [0,1] & \longrightarrow & CX \end{array}$$

beschreibt den Kegel über X. Ersetzt man die Abbildung $X \to \{*\}$ durch eine beliebige Abbildung $f\colon X \to Y$, erhält man als pushout den *Abbildungszylinder* von f.

6.11 Beispiel. Bei einem CW-Komplex erhält man $X^{(n)}$ aus $X^{(n-1)}$ durch folgendes pushout:

$$\begin{array}{ccc} \amalg_{i\in I_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\amalg q_i^n} & X_{n-1} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \amalg_{i\in I_n} D^n & \xrightarrow{\amalg Q_i^n} & X_n. \end{array}$$

Die hier auftretenden Q_i^n heissen die charakteristischen Abbildungen. Sie entsprechen dem in unserer Definition zu wählenden Homöomorphismus.

6.12 Definition. Sei X ein CW-Komplex. Ein *Unterkomplex* von X besteht aus einem Unterraum Y derart, dass Y die Vereinigung einer Menge offener Zellen von X ist, deren Ränder auch alle in Y liegen.

6.13 Lemma. *Falls Y ein Unterkomplex von X ist, erhält Y selbst eine CW-Struktur durch $Y^{(m)} := X^{(m)} \cap Y$.*

6.14 Definition. Wir definieren die Kategorie CW^2, deren Objekte *Paare* von CW-Komplexen (X, A) sind (also ein CW-Komplex X mit Unterkomplex A, $A = \emptyset$ ist erlaubt). Die Morphismen $Mor((X, A), (Y, B))$ sind die zellulären Abbildungen $X \to Y$, die A auf B abbilden.

6.15 Definition. Eine Homologietheorie h_* auf CW^2 besteht aus einer Sequenz von Funktoren $h_n\colon CW^2 \to ABEL$ und natürlichen Randabbildungen $\delta_n\colon h_n(X, A) \to h_{n-1}(A, \emptyset)$, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

(1) Homotopieinvarianz

(2) lange exakte Sequenz von Paaren

(3) Ausschneidung

(4) Summenaxiom

Die Homologietheorie heisst gewöhnlich, falls $h_n(*) = 0$ für $n \neq 0$.

6.16 Definition. Sei (X, A) ein Raumpaar. Eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to Y$ heisst *Homotopie relativ* A, falls $H(a,t) = H(a,0)$ für alle $a \in A$ und alle $t \in [0,1]$. Die Abbildungen H_0 und H_1 von X nach Y heissen dann homotop relativ A.

6.17 Satz. *Sei $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ eine stetige Abbildung zwischen CW-Paaren, deren Einschränkung auf A zellulär ist. Dann ist f homotop relativ A zu einer zellulären Abbildung.*

Proof. Wir geben nur die Beweisidee. X entsteht durch ankleben von Zellen. Mittels Induktion kann man sich daher (mehr oder weniger) auf den Fall beschränken, dass $X = D^n$, und dass $f(S^{n-1}) \subset Y^{(n-1)}$. Ausserdem kann man, da das Bild von D^n in einem endlichen Teilkomplex von Y liegt, annehmen, dass $Y = Y' \cup_\phi D^m$, wobei $\phi\colon S^{m-1} \to Y'$ eine anklebende Abbildung und $m > n$, und muss dann f zu einer Abbildung f' homotopieren (relativ A), deren Bild in Y' enthalten ist. Damit kann man Schritt für Schritt alle Zellen der Dimension $m > n$ vermeiden, und endet nach endlich vielen Schritten in $Y^{(n)}$.

Sei $U = Y - Y' \approx \mathbb{R}^m$. Setze $M := f^{-1}(U)$. Dies ist eine offene Teilmenge von $(D^n)^\circ$, also ebenfalls eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei $\emptyset \neq E \subset U$ mit $\overline{E}$ kompakt. Dann ist $V := f^{-1}(U - E)$ eine abgeschlossene Teilmenge von M. Eine starke Version des Satzes über glatte Approximierbarkeit von stetigen Funktionen impliziert, dass es eine zu $f|_M$ relativ V homotope Abbildung f' gibt, die auf $M - V$ glatt ist.

Die Homotopie und f' setzen sich (mittels $f|_{D^n - f^{-1}(E)}$) auf D^n fort, man erhält so eine zu f (relativ S^{n-1}) homotope Abbildung (da $D^n - f^{-1}(\overline{E})$ (wegen der Kompaktheit von $\overline{E}$) eine offene Umgebung der im Definitionsbereich noch fehlenden Teilmenge $D^n - f^{-1}(U)$ ist).

Die glatte Abbildung $f'|_M$ hat einen regulären Wert $p \in U$. Aus Dimensionsgründen ist p nicht im Bild, ist sie also nicht surjektiv. Damit ist p auch nicht im Bild der ganzen Abbildung f' (da das Urbild von U gerade aus M besteht). Aber $Y - \{p\}$ kann man auf Y' zusammenziehen (d.h. es gibt eine Homotopieäquivalenz, wobei Y' fest bleibt). Komposition mit dieser Kontraktion liefert eine Homotopie von f' zu f'' mit $im(f'') \subset Y'$. Da $f(S^{n-1}) \subset Y'$, welches bei der Kontraktion fest bleibt, ist dies eine Homotopie relativ S^{n-1}.

Zusammensetzen liefert die gewünschte Homotopie von f zu f'' relativ S^{n-1}. □

6.18 Lemma. *Sei (X,A) ein Paar von CW-Komplexen, mit Filtrierung X'_k von X. Dann ist X in kanonischer Weise ein CW-Komplex relativ A, mit $X_k := A \cup X'_k$.*

Proof. Man erhält X_k aus X_{k-1} durch Ankleben der k-dimensionalen Zellen von X'_k, welche nicht bereits in A enthalten sind. Dies funktioniert, da A selbst eine Vereinigung von Zellen von X ist. □

6.19 Lemma. *Sei X ein CW-Komplex mit Filtrierung $X^{(n)}$. Dann wird $X \times [0,1]$ ein CW-Komplex mit Filtrierung $(X \times [0,1])^{(n)} = X^{(n)} \times \{0,1\} \cup X^{(n-1)} \times [0,1]$. $X \times \{0,1\}$ ist ein Unterkomplex von $X \times [0,1]$.*

Proof. Übungsaufgabe. □

6.20 Korollar. *Seien $f, g\colon X \to Y$ zelluläre Abbildungen welche homotop sind. Dann gibt es eine zelluläre Homotopie $h\colon X \times [0,1] \to Y$ mit $h_0 = f$ und $h_1 = g$.*

6.2 Zelluläre Homologie

6.21 Definition. Sei (X, A) ein Paar von CW-Komplexen und h_n eine gewöhnliche Homologietheorie. Fasse X auf als CW-Komplex relativ A, mit Filtrierung $X_{-1} = A, X_0, \dots,$ unter Verwendung von Lemma 6.18. Wir definieren den zellulären Kettenkomplex

$$C_n^{cell}(X, A) := h_n(X_n, X_{n-1}),$$

mit Differential gegeben durch die Komposition

$$c_n^{cell}\colon h_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} h_{n-1}(X_{n-1}) \xrightarrow{h_{n-1}(i)} h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}).$$

Zum Beweis, dass $c_n \circ c_{n+1} = 0$ beachte, dass

$$c_n \circ c_{n+1} = h_{n-1}(i) \circ \delta_n \circ h_n(i) \circ \delta_{n+1}.$$

Nun ist aber $\delta_n \circ h_n(i)$ die Komposition von zwei aufeinanderfolgenden Homomorphismen der langen exakten Sequenz des Paares (X_n, X_{n-1}) und damit Null.

Die *zelluläre Homologie* $h_n^{cell}(X, A)$ ist die Homologie von $C_*^{cell}(X, A)$.

6.22 Lemma. *Jede zelluläre Abbildung $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ zwischen zwei CW-Paaren induziert eine Kettenabbildung zwischen den zellulären Kettenkomplexen und damit eine Abbildung auf der zellulären Homologie.*

Proof. Folgt sofort aus der Natürlichkeit der Paarsequenz. □

Wir könnten jetzt beweisen, dass zelluläre Homologie eine Homologietheorie auf der Kategorie der CW-Komplexe ist. Statt dessen werden wir sie direkt berechnen, und zeigen, dass sie mit der zugrundeliegenden Homologietheorie h_* übereinstimmt (es folgt natürlich insbesondere, dass es sich um eine Homologietheorie handelt). Man beachte, dass dieses Resultat eigentlich entgegengesetzt aufgefasst werden sollte: man berechnet h_* für CW-Komplexe!

6.23 Lemma. *Sei (X, A) ein Paar von CW-Komplexen mit Gerüsten des Komplexes relativ A gegeben durch $A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots$. Wähle feste pushouts für den Übergang von X_{n-1} zu X_n $(n \geq 0)$. Dann gilt*

(1) $h_k(X_n, X_{n-1}) = 0$ falls $k \neq n$.

(2) Für jedes n existiert ein eindeutiger Isomorphismus

$$\alpha_n\colon \oplus_{i \in I_n} h_0(*) \xrightarrow{\cong} C_n^{cell}(X, A) = h_n(X_n, X_{n-1}).$$

(3) Wir haben folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{i \in I_n} h_0(*) & \xrightarrow{\alpha_n} & C_n^{cell}(X, A) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle (a_{ij})} & & \Big\downarrow {\scriptstyle c_n} \\ \oplus_{j \in I_{n-1}} h_0(*) & \xrightarrow[\alpha_{n-1}]{} & C_{n-1}^{cell}(X, A). \end{array}$$

Es bleibt, die Matrix $(a_{i,j})$ *zu beschreiben. Sei dazu* $q_i^n\colon S^{n-1} \to X_{n-1}$ *die anklebende Abbildung der* n*-Zelle* e_i*, und* $Q_j^{n-1}\colon D^{n-1} \to X_{n-1}$ *die charakteristische Abbildung der* $n-1$*-Zelle* j*. Wir haben dann einen Homöomorphismus* $\tilde{Q}_j^{n-1}\colon D^{n-1}/S^{n-2} \to X_{n-1}/(X_{n-1} - (e_j^{n-1})^\circ)$*. Andererseits gibt es einen kanonischen Homöomorphismus* $D^{n-1}/S^{n-2} \approx S^{n-1}$*. Insgesamt ergibt sich das Diagramm*

$$\tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\tilde{h}(q_i^n)} \tilde{h}_{n-1}(X_{n-1}) \to h_{n-1}(X_{n-1}/X_{n-1} - (e_j^{n-1})^\circ)$$
$$\xrightarrow{h(\tilde{Q}_j^{n-1})^{-1}} \tilde{h}_{n-1}(D^{n-1}/S^{n-2}) \to \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}).g \qquad (6.24)$$

Hier benutzen wir die Konvention $D^0/S^{-1} = S^0$ *(d.h. auch die leere Menge wird zu einem (zusätzlichen) Punkt zusammengeschlagen. Dieser zusätzliche Punkt wird in* $X_0/(X_0 - e_j^0)$ *auf den Punkt* $[X_0 - e_j^0]$ *abgebildet.)*

Wir wissen bereits, dass $\tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \cong h_0(*)$ *mit einem kanonischen Isomorphismus. Obige Verknüpfung ist genau die Abbildung* $a_{i,j}\colon h_0(*) \to h_0(*)$ *vom* i*-ten zum* j*-ten Summanden.*

Proof. Ausschneidung von (kleineren) offenen Zellen und Verdickung liefert Isomorphismus

$$h_k(\amalg_{i\in I_n}(Q_i, q_i))\colon h_k(\amalg_{i\in I_n}(D^n, S^{n-1})) \to h_k(X_n, X_{n-1}).$$

Das Summen-Axiom impliziert $\oplus_{i\in I_n} h_k(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} h_k(\amalg_{i\in I_n}(D^n, S^{n-1}))$. Den kanonischen Isomorphismus $h_0(*) \to \tilde{h}_n(D^n, S^{n-1})$ haben wir bereits konstruiert, ausserdem haben wir gesehen, dass $\tilde{h}_k(D^n, S^{n-1}) = 0$ für $k \neq n$. Daraus folgen die ersten beiden Aussagen.

Für die dritte Aussage betrachte folgendes Diagramm ($n \geq 1$):

$$\begin{tikzcd}
h_0(*) \arrow[d, "\cong"] & & \\
\tilde{h}_n(D^n, S^{n-1}) \arrow[r, "h(Q_i^n, q_i^n)"'] \arrow[d, "\cong"] & \tilde{h}_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[d] & = C_n^{cell}(X,A) \\
\tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "h(q_i^n)"'] & \tilde{h}_{n-1}(X_{n-1}) \arrow[d] & \\
\oplus_{j \in I_{n-1}} h_{n-1}(D^{n-1}, S^{n-2}) \arrow[r, "\cong", "\oplus h(Q_j, q_j)"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_j"] & h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \arrow[d] & = C_{n-1}^{cell}(X,A) \\
h_{n-1}(D^{n-1}, S^{n-2}) \arrow[r, "h(Q_j, q_j)"'] \arrow[d, "\cong"] & h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-1} - (e_j^{n-1})^\circ) \arrow[d] & \\
\tilde{h}_{n-1}(D^{n-1}/S^{n-2}) \arrow[r, "h(\tilde{Q}_j^{n-1})"'] \arrow[d, "\cong"] & \tilde{h}_{n-1}(X_{n-1}/(X_{n-1} - (e_j^{n-1})^\circ)) & \\
\tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "\cong"] & & \\
h_0(*). & &
\end{tikzcd}$$

Die angegebene Abbildung $C_n^{cell}(X,A) \to C_{n-1}^{cell}(X,A)$ ist gerade die Randabbildung ist. Die Abbildung $\tilde{h}_n(Q_i, q_i)$ ist gerade die Inklusion der i-ten Komponente in der Zerlegung von C_n^{cell} als direkte Summe, entsprechend für $\tilde{h}_{n-1}(Q_j, q_j)$ und C_{n-1}^{cell}. Die gesuchte "Komponente" a_{ij} der Randabbildung ergibt sich also als langer Pfad durch das Diagramm von links oben über die Mitte rechts nach links unten (geeignete Isomorphismen sind zu invertieren). Wegen Kommutativität ergibt sich, dass diese Abbildung mit der behaupteten Abbildung $h_{n-1}(S^{n-1}) \to h_{n-1}(S^{n-1})$ übereinstimmt. Damit folgt auch die letzte Aussage. □

6.25 Korollar. *Seien h_* und k_* gewöhnliche Homologietheorien und $\phi\colon h_0(*) \to k_0(*)$ ein Isomorphismus. Dann induziert ϕ einen natürlichen (bezüglich zellulärer Abbildungen) Isomorphismus der mittel h_* und k_* gebildeten zellulären Kettenkomplexe, und damit auch der zellulären Homologie.*

Proof. Sei (X,A) ein CW-Paar. Nach Wahl von pushouts erhalten wir gemäss Lemma 6.23 folgende Isomorphismen von Kettenkomplexen:

$$C_n^h(X,A) \xleftarrow{\alpha_n^n} \oplus_{i \in I_n} h_0(*) \xrightarrow{\oplus\phi} \oplus_{i \in I_n} k_0(*) \xrightarrow{\alpha_n^k} C_n^k(X,A).$$

Beachte, dass es sich hierbei wirklich um Kettenabbildungen handelt, da die Differentiale durch Abbildungsgrade berechnet werden, und wegen Korollar 5.57

und Bemerkung 5.58 der Abbildungsgrad unabhängig von der gewöhnlichen Homologietheorie ist.

Die Änderung der pushouts liefert neue Isomorphismen $\beta_n^h\colon C_n^h(X,A) \to \oplus_{i\in I_n} h_0(*)$. Allerdings gilt $\alpha_n^h = \beta_n^h \circ \Phi^h$, wobei $\Phi^h\colon \oplus_{i\in I_n} h_0(*) \to \oplus_{i\in I_n} h_0(*)$ durch eine Diagonalmatrix gegeben ist, auf deren Diagonale Abbildungsgrade von Homöomorphismen von Abbildung $S^n \to S^n$ stehen (dies folgt sofort aus dem Beweis von Lemma 6.23). Es folgt, dass $\Phi^h = \Phi^k = \Phi$. Da andererseits die Diagonalabbildung $\oplus_{i\in I}\phi$ mit Φ vertauscht, haben wir also das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
C_n^h(X,A) & \xrightarrow{\alpha_n^n} & \oplus_{i\in I_n} h_0(*) & \xrightarrow{\oplus\phi} & \oplus_{i\in I_n} k_0(*) & \xrightarrow{\alpha_n^k} & C_n^k(X,A) \\
\big\downarrow{=} & & \big\downarrow{\Phi} & & \big\downarrow{\Phi} & & \big\downarrow{=} \\
C_n^h(X,A) & \xrightarrow{\alpha_n^n} & \oplus_{i\in I_n} h_0(*) & \xrightarrow{\oplus\phi} & \oplus_{i\in I_n} k_0(*) & \xrightarrow{\alpha_n^k} & C_n^k(X,A),
\end{array}$$

d.h. der Isomorphismus hängt gar nicht von der Wahl der pushouts ab. Es folgt nun leicht, dass er natürlich ist. □

Im folgenden werden wir eine Verallgemeinerung der Paarsequenz auf geschachtelte Tripel von Räumen benötigen.

6.26 Satz. *Sei h_* eine Homologietheorie und $A \subset X \subset Z$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz, die sogenannte Tripelsequenz*

$$\to h_{n+1}(Z,X) \xrightarrow{\delta_{n+1}} h_n(X,A) \to h_n(Z,A) \to h_n(Z,X) \xrightarrow{h}_{n-1} (X,A) \to .$$

Die Abbildungen sind durch die Inklusionene induziert, oder ergeben sich als Randabbildung $\delta_{n+1}\colon h_{n+1}(Z,X) \to h_n(X) \to h_n(X,A)$ als Verknüpfung der Randabbildung der Paarsequenz mit der von der Inklusion induzierten Abbildung.

Proof. Man hat drei exakte Paarsequenzen zu den Paaren (X,A), (Z,A) und (Z,X). Diagrammjagt mit Hilfe dieser drei exakten Sequenzen liefert was wir wollen. □

6.27 Lemma. *Sei (X,A) ein CW-Paar und h_* eine gewöhnliche Homologietheorie. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&h_k(X_n, X_{n-1}) = 0 \qquad \textit{für } k \neq n. \\
&h_n(X_k, A) \to h_n(X,A) \qquad \textit{ist ein Isomomrphismus für } k > n \\
&h_k(X_n, A) = 0 \qquad \textit{für } k > n.
\end{aligned}$$

Proof. Die erste Aussage haben wir in Lemma 6.23 bereits gezeigt. Ansonsten betrachte die exakte Sequenz des Tripels $A \subset X_{n-1} \subset X_n$, um zu sehen, dass $h_k(X_{n-1},A) \to h_k(X_n,A)$ surjektiv ist, falls $h_k(X_n,X_{n-1}) = 0$, also für $k \neq n$, und um zu sehen dass $h_k(X_{n-1},A) \to h_k(X_n,A)$ injektiv ist falls $k+1 \neq n$. Es folgt, dass wir für $k < n$ und $l > 0$ einen Isomorphismus $h_k(X_n,A) \to h_k(X_{n+l},A)$ erhalten. Wenn X ein endlich-dimensionaler CW-Komplex ist, folgt die zweite Aussage sofort (da dann $X = X_{n+l}$ für genügend grosses l). Für unendlich-dimensionale X muss man noch ein kompliziertes Argument geben, welches das Summenaxiom benutzt.

Andererseits sieht man, dass $h_k(X_n, A) \cong h_k(X_{n-l}, A)$ falls $k > n$ und $l \geq 0$. Mit $l = n+1$ erhält man $h_k(X_n, A) \cong h_k(A, A) = 0$ (letztere Aussage folgt sofort aus der exakten Paarsequenz des Paars (A, A)). □

6.28 Satz. *Sei h_* eine gewöhnliche Homologietheorie. Dann gibt es für endliche CW-Paare einen natürlichen Isomorphismus*

$$\tau_n(X, A)\colon H_n(X, A) \xrightarrow{\cong} H_n^{cell}(X, A).$$

Proof. Hierzu müssen wir ein wenig Diagrammjagd betreiben.

Wir haben folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & h_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[d, "\delta_{n+1}"] \arrow[dr, "c_{n+1}"] & & 0 = h_{n-1}(X_{n-2}, A) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & h_n(X_n, A) \arrow[r, tail, "h_n(j)"] \arrow[d, two heads] & h_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[dr, "c_n"] & h_{n-1}(X_{n-1}, A) \arrow[d, tail] \\
 & h_N(X_{n+1}, A) = h_n(X, A) \arrow[d] & & h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\
 & 0 = h_n(X_{n+1}, X_n) & &
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind alle langen horizontalen und vertikalen Stücke von langen exakten Tripelsequenzen. Es folgt insbesondere dass $\ker(c_n) = \ker(\delta_n) = \operatorname{im}(h_n(j)) \cong h_n(X_n, A)$. Folglich erhalten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
h_n(X_n, A) \arrow[r, "h_n(j)", "\cong"'] \arrow[d, two heads] & \ker(c_n) \arrow[d, two heads] \\
h_n(X, A) \cong h_n(X_{n+1}, A) \arrow[r, dotted, two heads, "\tau"] & \ker(c_n)/\operatorname{im}(c_{n+1}) = h_n^{cell}(X, A).
\end{tikzcd}$$

Da $\operatorname{im}(c_{n+1}) = h_n(j)(\operatorname{im}(\delta_{n+1}))$ und da $h_n(j)$ injektiv ist, liefert der Isomorphiesatz die Existenz von τ und impliziert, dass τ ein Isomorphismus ist. □

6.29 Korollar. *Seien h_* und k_* gewöhnliche Homologietheorien mit $h_0(*) \cong k_0(*)$. Dann gilt $h_n(X, A) \cong k_n(X, A)$ für jedes endliche CW-Paar (X, A).*

Proof. Dies folgt sofort aus Satz 6.28 und Korollar 6.25. □

6.30 Beispiel. Wir berechnen die singuläre Homologie von $\mathbb{R}P^2$, indem wir seine zelluläre Homologie berechnen. Entsprechend der CW-Struktur von $\mathbb{C}P^n$ (vergleiche Beispiel 6.6) können wir $\mathbb{R}P^n$ eine CW-Struktur mit $X_k = \mathbb{R}P^k$ geben, und so dass $\mathbb{R}P^n$ genau eine k-Zelle für jedes $0 \leq k \leq n$ besitzt. Die anheftende Abbildung $q^k\colon S^{k-1} \to X_{k-1} = \mathbb{R}P^{k-1}$ der k-Zelle ist die kanonische Projektion $S^{k-1} \to \mathbb{R}P^{k-1}$ (wir identifizieren gegenüberliegende Punkte von S^k und $\mathbb{R}P^k$ zu erhalten).

Im Fall von $\mathbb{R}P^2$ erhalten wir also den zellulären Kettenkomplex

$$\begin{tikzcd}
C_0(\mathbb{R}P^2) \arrow[d, equal] & C_1(\mathbb{R}P^2) \arrow[l, "c_1"'] \arrow[d, equal] & C_2(\mathbb{R}P^2) \arrow[l, "c_2"'] \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \arrow[l, "0"'] & \mathbb{Z}. \arrow[l, "2"']
\end{tikzcd}$$

Hier ist $C_k(\mathbb{R}P^2) \cong \oplus_{i\in I_k(\mathbb{R}P^2)}\mathbb{Z}$ die direkte Summe über soviele Kopien von $\mathbb{Z} = H_0(*)$, wie es k-Zellen gibt, in unserem Fall also jeweils genau $\mathbb{Z}$ (oder 0). Für die Differentiale muss man die anklebende Abbildung $S^{k-1} \to X_{k-1}$ mit der Projektion $X_{k-1} \to X_{k-1}/(X_{k-1} - e^j)$ verknüpfen, wobei bei der Projektion alle Punkte ausserhalb der (j-ten) offenen $(k-1)$-Zelle zu einem Punkt identifiziert werden (der Quotient ist dann automatisch homöomorph zu S^{k-1}). Bei uns ist für die anklebende Abbildung der 2-Zelle diese Projektion die Identität. Wir müssen also nur den Grad der anklebenden Abbildung $q^2\colon S^1 \to S^1\colon z \mapsto z^2$ berechnen. Dieser ist aber 2. Also ist c_2 gegeben durch Multiplikation mit 2.

Für das Differential c_1 beachte, dass (nach Konvention) der zu betrachtende Quotient $X_0/\emptyset$ von $X_0 = \{pt\}$ gegeben ist als $X_0 \amalg \{*\} = S^0$. Die anheftende Abbildung bildet beide Punkte von S^0 ab auf den ursprünglich vorhandenen Punkt pt. Wir müssen also den Grad der Abbildung $S^0 \to S^0$ berechnen, die beide Punkte von S^0 auf denselben Punkt abbildet. Der Grad dieser Abbildung ist Null. Damit ergibt sich der zelluläre Kettenkomplex wie behauptet.

Die Homologie des zellulären Kettenkomplexes (und damit die Homologie von $\mathbb{R}P^2$) ergibt sich nun als

$$H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2, \quad H_k(\mathbb{R}P^2) = 0 \quad \text{für } k \geq 2.$$

6.3 Produkte von CW-Komplexen

6.31 Satz. *Seien X und Y CW-Komplexe mit Gerüsten X_n und Y_n. Mindestens einer der beiden CW-Komplexe sei endlich, habe also insgesamt nur endlich viele Zellen.*

Dann ist $X \times Y$ ein CW-Komplex mit Gerüsten

$$(X \times Y)_n = \bigcup_{k=0}^{n} X_k \times Y_{n-k}.$$

Die Produkte der k-Zellen von X und q-Zellen von Y ergeben die $(k+q)$-Zellen von $X \times Y$.

Hierbei verwenden wir, dass $D^n \approx [0,1]^n = [0,1]^k \times [0,1]^{n-k} \approx D^k \times D^{n-k}$. Entsprechend erhält man für den Rand eine Zerlegung $S^{n-1} \approx S^{k-1} \times D^{n-k} \cup D^k \times S^{n-k-1}$.

Die anklebenden Abbildungen ergeben sich wie folgt; wir haben push-outs

$$\begin{tikzcd}
\amalg_{k=0}^n \amalg_{(i,j)\in I_k(X)\times I_{n-k}(Y)} S^{k-1} \times D^{n-k} \cup D^k \times S^{n-k-1} \arrow[r, "\amalg q_i^k(X)\times Q_j^{n-k}(Y) \cup Q_i(X)\times q_j(Y)"] \arrow[d] & (X\times Y)_{n-1} \arrow[d] \\
\amalg_{k=0}^n \amalg_{(i,j)\in I_k(X)\times I_{n-k}(Y)} D^k \times D^{n-k} \arrow[r, "\amalg Q_i^k(X)\times Q_j^{n-k}(Y)"] & (X\times Y)_n.
\end{tikzcd}$$

Hier ist $q_i^k(X)\colon S^{k-1} \to X_{k-1}$ die anheftende Abbildung der i-ten k-Zelle von X, und $Q_i^k(X)\colon D^k \to X_k$ die charakteristische Abbildung der i-ten k-Zelle von X (und entsprechend für Y).

Proof. Man sieht sofort, dass das push-out tatsächlich die Punktmenge $(X \times Y)_n$ definiert. Ausserdem kann man direkt überprüfen, dass die push-out Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt, falls einer der beiden CW-Komplexe endlich ist. In diesem Fall checked man ausserdem, dass die Produkttopologie auf $X \times Y$ mit der Kolimestopologie der $(X \times Y)_n$ übereinstimmt. □

6.32 Bemerkung. Falls sowohl X als auch Y unendliche CW-Komplexe sind, ist die in Satz 6.31 beschriebene CW-Topologie auf $X \times Y$ nicht notwendigerweise gleich der Produkttopologie. Die Identität ist allerdings eine stetige Abbildung $(X \times Y)^{CW} \to X \times Y$. Diese Abbildung induziert einen Isomorphismus in singulärer Homologie.

6.33 Beispiel. Der 2-Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ wird ein CW-Komplex mit einer Null-Zell (entspricht dem Produkt der beiden Null-Zellen in den beiden Faktoren), zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle. Man erhält $X_1 = S^1 \vee S^1$ und Randabbilung $\partial[0,1] \times [0,1] \to S^1 \vee S^1$.

6.34 Definition. Seien A, B abelsche Gruppen (also Moduln über dem kommutativen Ring $\mathbb{Z}$). Das *Tensorprodukt* $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ ist eine abelsche Gruppe $A \otimes B$ zusammen mit einer $\mathbb{Z}$-bilinearen Abbildung $\phi\colon A \times B \to A \otimes B$ welche folgende universelle Eigenschaft hat:

Für jede bilineare Abbildung $\gamma\colon A \times B \to Z$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\Gamma\colon A \otimes B \to Z$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \\ A \otimes_{\mathbb{Z}} B. \arrow[ur, "\Gamma"'] & \end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen $\phi(a,b) = a \otimes b$ für $a \in A$, $b \in B$.

Falls $f\colon A \to A'$ und $g\colon B \to B'$ Homomorphismen sind, definiere $f \otimes g\colon A \otimes B \to A' \otimes B'$ mittels der universellen Eigenschaft für folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f \times g} & A' \times B' \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi'} \\ A \otimes_{\mathbb{Z}} B & \xrightarrow{f \otimes g} & A' \otimes_{\mathbb{Z}} B'. \end{array}$$

6.35 Satz. *Tensorprodukte existieren und sind eindeutig bis auf Isomorphie.*

6.36 Beispiel. $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong A$, $(A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$, $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \cong B \otimes_{\mathbb{Z}} A$, für $p, q \in \mathbb{Z}$ prim gilt $\mathbb{Z}/p^k \otimes \mathbb{Z}/q^l \cong \begin{cases} 0, & p \neq q \\ \mathbb{Z}/p^{min(k,l)}, & p = q. \end{cases}$.

6.37 Definition. Seinen (C_*, c_*) und (D_*, d_*) Kettenkomplexe. Wir definieren das Tensorprodukt dieser Kettenkomplexe $(C \otimes D)$ als den Kettenkomplex mit

$$(C \otimes D)_n := \oplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k \otimes D_{n-k}.$$

Das Differential ist gegeben als Summe der Abbildungen

$$(c \otimes d)_n|_{C_k \otimes D_{n-k}} := c_k \otimes \mathrm{id}_{D_{n-k}} + (-1)^k \mathrm{id}_{C_k} \otimes d_{n-k}.$$

6.38 Lemma. *Mit Definition 6.37 ergibt sich $(c \otimes d)_{n-1} \circ (c \otimes d)_n = 0$, wir haben also tatsächlich einen Kettenkomplex definiert.*

Proof. Man muss die Aussage nur für die Einschränkungen auf $C_k \otimes D_{n-k}$ nachprüfen. Hierfür gilt

$$\begin{aligned}
&(c \otimes d)_{n-1} \circ (c \otimes d)_n|_{C_k \otimes D_{n-k}} \\
&= (c \otimes d)_{n-1} \circ (c_k \otimes \mathrm{id}_{D_{n-k}} + (-1)^k \mathrm{id}_{C_k} \otimes d_{n-k}) \\
&= (c_{k-1} \otimes \mathrm{id}_{D_{n-k}} + (-1)^{k-1} \mathrm{id}_{C_{k-1}} \otimes d_{n-k}) \circ c_k \otimes \mathrm{id}_{D_{n-k}} \\
&\quad + (-1)^k (c_k \otimes \mathrm{id}_{D_{n-k-1}} + (-1)^k \mathrm{id}_{C_k} \otimes d_{n-k-1}) \circ \mathrm{id}_{C_k} \otimes d_{n-k} \\
&= (c_{k-1} \circ c_k) \otimes \mathrm{id} + (-1)^{k-1} c_k \otimes d_{n-k} + (-1)^k c_k \otimes d_{n-k} + \mathrm{id} \otimes (d_{n-k-1} \circ d_{n-k}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

6.39 Satz. *Seinen X, Y endliche CW-Komplexe. Dann gilt für den zellulären Kettenkomplex (berechnet mittels singulärer Homologie)*

$$C_*^{cell}(X \times Y) \cong C_*^{cell}(X) \otimes C_*^{cell}(Y).$$

Proof. Wir wissen, dass $C_p^{cell}(X) \cong \oplus_{i \in I_p(X)} \mathbb{Z}$, und $C_q^{cell}(Y) \cong \oplus_{j \in I_q(Y)} \mathbb{Z}$, wobei $I_p(X)$ die Menge der p-Zellen von X indiziert, $I_q(Y)$ die Menge der q-Zellen von Y.

Insbesondere

$$(C^{cell}(X) \otimes C^{cell}(Y))_n \cong \oplus_{k=0}^n \Big(\bigoplus_{I_k(X)} \mathbb{Z}\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{I_{n-k}(Y)} \mathbb{Z}\Big).$$

Weiter gilt $C_n^{cell}(X \times Y) \cong \bigoplus_{I_n(X \times Y)} \mathbb{Z} = \bigoplus_{k=0}^n \bigoplus_{I_k(X) \times I_{n-k}(Y)} \mathbb{Z}$. Dies stimmt mit obigem Ausdruck überein, da $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, und da das Tensorprodukt distributiv gegenüber direkten Summen ist.

Zur Berechnung der Differentiale muss man nun noch die sich aus den anklebenden Abbildungen der Produktzellen ergebenden Abbildungsgrade überprüfen. □

6.40 Beispiel. Sei $X = S^1$, $Y = S^2$. Wähle CW-Struktur auf S^n mit genau einer Null-und einer n-Zelle und keinen weiteren Zellen (wie gewöhnlich). Dann sehen die zellulären Kettenkomplexe wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
C_*(S^1): &\qquad \mathbb{Z} = C_1 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} = C_0 \\
C_*(S^2): &\qquad \mathbb{Z} = C_2 \to 0 = C_1 \to \mathbb{Z} = C_0.
\end{aligned}$$

Das Differential für S^1 muss Null sein, da $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Folglich erhält man als Tensorprodukt der Kettenkomplexe:

$$C_*(S^1 \times S^2): \qquad \mathbb{Z} = C_3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} = C_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} = C_1 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} = C_0.$$

Hier sind alle Differentiale Null, da auch alle Differentiale in den Faktor Kettenkomplexen Null sind. Für die Homologie erhält man also:

$$H_k(S^1 \times S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & 0 \le k \le 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

6.41 Beispiel. $X = Y = \mathbb{R}P^2$. Wir benutzen die CW-Struktur mit genau einer Zelle in Dimensionen 0, 1 und 2 und keinen weiteren Zellen. Man erhält also nach Beispiel 6.30 den zellulären Kettenkomplex

$$C_2 = \mathbb{Z} \xrightarrow{2} C_1 = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} C_0 = \mathbb{Z}.$$

Für das Tensorprodukt erhält man folglich

$$C_0 = \mathbb{Z} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}.$$

Hieraus berechnet sich nun direkt die Homologie als

$$H_k(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, & \text{falls } k = 1 \\ \mathbb{Z}/2, & \text{falls } k = 2, 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

6.42 Bemerkung. Beachte insbesondere, dass im allgemeinen nicht gilt:

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} H_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{n-k}(Y).$$

7 Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten

7.1 Frage. Gegeben sei ein Raum X. Z.B. um seine Homologie zu berechnen, ist es interessant, CW-Komplexe Y zu finden, die homotopieäquivalent zu X sind. Ein Ziel ist es, solch ein Y zu finden, das möglichst einfach ist. Z.B. stellt man sich die Aufgabe, Y zu finden von möglichst kleiner Dimension. Dabei ist die Dimension eines CW-Komplexes Y mit Gerüsten Y_n das kleinste n, so dass $Y_n = Y$ (oder ∞, falls kein solches n existiert).

7.2 Beispiel.

- $D^n \simeq \{*\}$, ist also homotopieäquivalent zu einem Null-dimensionalen CW-Komplex.

- S^n ist ein n-dimensionaler CW-Komplex. Da $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, aber $H_n(Y) = H_n(Y_{n-1}) = 0$ (nach Lemma 6.27) falls $\dim(Y) \leq n-1$ und folglich $Y = Y_{n-1}$, ist S^n nicht homotop zu einem CW-Komplex der Dimension $< n$.
- $\mathbb{R}P^2$ ist ein zwei-dimensionaler CW-Komplex. Leider gilt $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$, so dass man mit diesem einfachen Argument nicht zeigen kann, dass es keinen 1-dimensionalen Komplex geben kann, der homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}P^2$ ist. Dies kann man mit Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ zeigen.

7.3 Definition. Sei (C_*, c_*) ein Kettenkomplex, R eine abelsche Gruppe. Definiere die Homologie von C_* mit R-Koeffizienten als

$$H_k(C_*, R) := H_K(C_* \otimes_{\mathbb{Z}} R, c_* \otimes \mathrm{id}_R),$$

also als Homologie des Kettenkomplexes $C_* \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

Definiere die Kohomologie von C_* mit Koeffizienten in R als

$$H^k(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*, R), \mathrm{Hom}(c_*, \mathrm{id}_R)),$$

also als Kohomologie des Kokettenkomplexes, dessen k-te Kettengruppe die Homomorphismengruppe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*, R)$ ist, mit Differential

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_k, R) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{k+1}, R) \colon \alpha \mapsto \alpha \circ c_k.$$

Beachte: ein Kokettenkomplex ist dasselbe wie ein Kettenkomplex, nur das die Differentiale den Grad erhöhen. Die k-te Kohomologie ist entsprechend definiert wie Homologie als Kern des aus der k-ten Gruppe heraus abbildenden Differential modulo des in diese Gruppe hinein abbildenden Differentials.

7.4 Definition. Sei (X, A) ein Paar von topologischen Räumen. Die singuläre Homologie oder Kohomologie von (X, A) mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe R ist definiert als

$$\begin{aligned} H_k(X, A; R) &:= H_k(C_*^{sing}(X, A) \otimes R) \\ H^k(X, A; R) &:= H^k(\mathrm{Hom}(C_*^{sing}(X, A), R)). \end{aligned}$$

Entsprechend definiert man zelluläre (Ko)Homologie mit Koeffizienten in R für ein CW-Paar mittels des zellulären Kettenkomplexes.

7.5 Definition. Eine *Kohomologie* ist eine Sequenz von *kontravarianten* Funktoren

$$h^k \colon TOP^2 \to ABEL$$

mit natürlichen Randabbildungen $\delta^n \colon h^n(A) \to h^{n+1}(X, A)$, die alle Axiome für eine Homologietheorie mit umgedrehten Pfeilen erfüllt.

7.6 Satz. *Singuläre (Ko)Homologie mit Koeffizienten in R ist eine gewöhnliche (Ko)Homologietheorie mit $H_0(*; R) = R$ bzw. $H^0(*; R) = R$.*

Singuläre und zelluläre Homologie mit Koeffizienten in R stimmen überein, genauso singuläre und zelluläre Kohomologie mit Koeffizienten in R.

Proof. Die Beweise folgen den Beweisen der entsprechenden Aussagen mit $R = \mathbb{Z}$, die wir explizit durchgeführt haben. □

7.7 Beispiel. Wir berechnen $H_k(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2)$. Für den zellulären Kettenkomplex erhielten wir (nach Beispiel 6.30)

$$C_2 = \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} = C_0.$$

Tensorieren mit $\mathbb{Z}/2$ liefert

$$\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2.$$

Beachte, dass die Abbildung $\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \colon a \mapsto 2a$ die Nullabbildung ist. Folglich erhält man

$$H_k(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & \text{falls } 0 \leq k \leq 2 \\ 0k & \text{sonst.} \end{cases}$$

7.8 Bemerkung. Beachte insbesondere, dass im allgemeinen nicht gilt

$$H_k(X; R) \cong H_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R.$$

7.9 Satz. *Sei R ein Körper (nicht nur eine abelsche Gruppe) (oder allgemeiner ein beliebiger Ring). DAnn wird $A \otimes_{\mathbb{Z}} R$ ein R-Vektorraum (oder allgemeiner ein R-Rechtsmodul) durch die Festlegung $(a \otimes r) \cdot r_0 := a \otimes (rr_0)$. Für jeden Gruppenhomomorphismus $f \colon A \to B$ wird $f \otimes \mathrm{id}_R \colon A \otimes_{\mathbb{Z}} R \to B \otimes_{\mathbb{Z}} R$ eine R-lineare Abbildung (oder allgemeiner ein R-Modulhomomorphismus).*

Insbesondere sind für (C_*, c_*) die Gruppen $\ker(c_k \otimes \mathrm{id}_R)$ und $\mathrm{im}(c_{k+1} \otimes \mathrm{id}_R)$ und folglich auch $H_k(C_*; R)$ R-Vektorräume (oder allgemeiner R-Moduln).

Entsprechende Aussagen gelten für $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, R)$ und somit auch für die Kohomologiegruppen $H^k(\mathrm{Hom}(C_*, R))$. Hier ist die Skalarmultiplikation definiert durch $(\phi \cdot r)(x) := \phi(x) \cdot r$ für $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, R)$, $r \in R$ und $a \in A$.

7.10 Beispiel. Für einen Raum X ist $H_k(X; \mathbb{Q})$ ein $\mathbb{Q}$- und $H^k(X; \mathbb{Z}/2)$ ein $\mathbb{Z}/2$-Vektorraum.

Durch die Verwendung geeigneter Koeffizienten erhält man also Homologie- und Kohomologiegruppen mit mehr algebraischer Struktur, mit denen man ggf. leichter umgehen kann.

7.1 Euler Charakteristik

7.11 Definition. Sei K ein Körper und C_* ein *Kettenkomplex von K Vektorräumen*, also C_k ein K-Vektorraum für jedes k, und $c_k \colon C_k \to C_{k-1}$ eine K-lineare Abbildung. Sei C_* weiter *endlich*, d.h. $\dim_K(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k) < \infty$. Letzteres heisst natürlich, dass jedes C_k endlich dimensional ist, und nur endlich viele von $\{0\}$ verschieden.

Die *Euler-Charakteristik* des Kettenkomplexes C_* ist definiert als

$$\chi(C_*) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim C_k.$$

7.12 Definition. Sei X ein endlicher CW-Komplex (das heisst mit insgesamt nur endlich vielen Zellen). Definiere seine *Euler-Charakteristik*

$$\chi(X) := \chi(C_*^{cell}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left| I_k \right|.$$

Hier indiziert I_k wie üblich die Menge der k-Zellen, d.h. $|I_k|$ ist gerade die Anzahl der k-Zellen.

Beachte, dass man hier $\mathbb{Q}$ durch jeden beliebigen anderen Körper ersetzen könnte.

7.13 Beispiel.

- $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$
- $\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1$
- $\chi(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade.} \end{cases}$

7.14 Bemerkung. Beachte, dass dies Definition 1.19 der Eulercharakteristik für endliche Polyeder verallgemeinert, da jedes Polyeder die Struktur eines CW-Komplexes trägt, so dass die k-Simplizes gerade die k-Zellen werden (ein nicht-entartetes k-Simplex ist homöomorph zu S^k).

Wir wollen nun (endlich) zeigen, dass die Euler-Charakteristik eine Homöomorphie Invariante ist, indem wir zeigen, dass man sie aus der Homologie berechnen kann.

Zunächst zeigen wir die algebraische Version dieses Satzes:

7.15 Satz. *Sei K ein Körper und C_* ein endlicher Kettenkomplex von K-Vektorräumen. Dann gilt*

$$\chi(C_*) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim H_k(C_*).$$

Proof. Wir können (durch Umbenennen der Indizes) annehmen dass $C_k = 0$ für $k < 0$. Ausserdem gilt $C_k = 0$ für $k > n$ (für geeignetes n). Wir beweisen den Satz per Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 0$: Wir haben einen Kettenkomplex $\to 0 \to C_0 \to 0 \to$. Es folgt sofort $H_k(C_*) = C_k$, so dass die Formeln identisch sind.

Induktionsschritt. Sei $\to 0 \to C_{n+1} \to C_n \to \cdots \to C_0 \to 0 \to$ ein Kettenkomplex. Definiere einen Kettenkomplex $\tilde{C}_*$ durch $\tilde{C}_k = C_k$ für $k \leq n$ und $\tilde{C}_k = 0$ für $k \geq n + 1$. Dann gilt $H_k(\tilde{C}_*) = H_k(C_*)$ für $k < n$. Es gilt allerdings $H_n(\tilde{C}_*) = \ker(c_n)$, man hat also eine Projektion auf $H_n(C_*) = \ker(c_n)/\operatorname{im}(c_{n+1})$ und erhält somit eine exakte Sequenz von K-Vektorräumen

$$0 \to \operatorname{im}(c_{n+1}) \to H_n(\tilde{C}_*) \to H_n(C_*) \to 0. \tag{7.16}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\chi(\tilde{C}_*) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H_k(\tilde{C}_*).$$

Wir wollen nun die Dimensionsformel (Lemma 7.18) auf Gleichung (7.16) anwenden. Dazu müssen wir noch $\operatorname{im}(c_{n+1})$ berechnen. Hierfür ergibt sich die exakte Sequenz (da $H_{n+1}(C_*) = \ker(c_{n+1})$)

$$0 \to H_{n+1}(C_*) \to C_{n+1} \to \operatorname{im}(c_{n+1}) \to 0. \tag{7.17}$$

Aus Gleichung (7.16) und (7.17) und Lemma 7.18 folgt also

$$\dim C_{n+1} = \dim H_{n+1}(C_*) + \dim H_n(\tilde{C}_*) - \dim H_n(C_*).$$

Somit

$$\begin{aligned}
\chi(C_*) &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \dim C_k = \chi(\tilde{C}_*) + (-1)^{n+1} \dim(C_{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H_k(\tilde{C}_*) + (-1)^{n+1}(\dim H_{n+1}(C_*) + \dim H_n(\tilde{C}_*) - \dim H_n(C_*)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim H_k(C_*) + (-1)^n \dim H_n(\tilde{C}_*) + (-1)^{n+1} \dim H_{n+1}(C_*) \\
&\qquad - (-1)^n \dim H_n(\tilde{C}_*) + (-1)^n \dim H_n(C_*).
\end{aligned}$$

□

7.18 Lemma. *Sei* $0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0$ *eine exakte Sequenz von* K*-Vektorräumen. Dann gilt*

$$\dim(B) = \dim(A) + \dim(C).$$

Proof. Es gilt $\operatorname{im}(f) = C$ und $\ker(f) \cong A$. Die Aussage folgt also aus der Dimensionsformel der linearen Algebra. □

7.19 Satz. *Seien* X, Y *endliche CW-Komplexe. Dann gilt*

(1) $\chi(X) = \sum_{k=0}^{\dim(X)} \dim_{\mathbb{Q}} H_k(X, \mathbb{Q})$.

(2) $X \simeq Y \implies \chi(X) = \chi(Y)$

(3) $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$.

(4) Sei $i\colon X_0 \hookrightarrow X_1$ *die Inklusion eines Unterkomplexs und* $f\colon X_0 \to X_2$ *eine zelluläre Abbildung, wobei* X_0, X_1, X_2 *endliche CW-Komplexe sind. Sei* X *definiert als pushout von* $X_2 \xleftarrow{f} X_0 \xrightarrow{i} X_1$*. Dann gilt*

$$\chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - \chi(X_0).$$

Proof. Der erste Punkt folgt sofort aus dem vorherigen Satz. Daraus folgt dann die zweite Aussage, da singuläre und zelluläre Homologie mit rationalen Koeffizienten isomorph sind, aber singuläre Homologie (auch mit rationalen Koeffizienten) eine Homotopieinvariante ist.

Für die Zellen von $X \times Y$ gilt $|I_n(X \times Y)| = \sum_{k=0}^n |I_k(X) \times I_{n-k}(Y)|$. Daraus folgt einfach die Produktformel, Details siehe Übung.

Das pushout von $X_2 \xleftarrow{f} X_0 \xrightarrow{i} X_1$ ist unter den gemachten Voraussetzungen ein CW-Komplex mit n-Gerüst $X^{(n)}$ gegeben durch das pushout $X_2^{(n)} \xleftarrow{f|} X_0^{(n)} \xrightarrow{i|} X_1^{(n)}$. Beim Ankleben von Zellen beachte man, dass man zunächst alle n-Zellen von X_2 an das $(n-1)$-Gerüst anklebt, dann die noch fehlenden n-Zellen von X_1, d.h. alle n-Zellen, die nicht im Unterkomplex X_0 enthalten sind (deren Bild in X_2 ist ja bereits vorhanden). Es folgt $|I_n(X)| = |I_n(X_2)| + |I_n(X_1)| - |I_n(X_0)|$, woraus wiederum die Behauptung folgt. □

7.20 Korollar. *Die Euler-Charakteristik eines endlichen Polyeders (oder allgemeiner eines endlichen CW-Komplexes) ist eine Homöomorphieinvariante, hängt also nicht von der gewählten Zellzerlegung ab (da es sich bei der Euler-Charakteristik ja sogar um eine Homotopieinvariante handelt).*

7.21 Satz. *Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit mit kompakter glatter Untermannigfaltigkeit N. Dann kann man eine CW-Struktur für M finden, so dass N ein Unterkomplex ist.*

Entsprechendes gilt, falls M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand N ist.

Proof. Wir führen den Beweis hier nicht. Dies kann man z.B. mittels Morse-Theorie zeigen. □

7.2 Lefschetz-Zahlen

Eine der einfachsten Invarianten zur Untersuchung von Räumen ist die Euler-Charakteristik. Ihre Definition basiert auf dem Dimensionsbegriff. Wir wollen nun eine entsprechend einfache Invariante für Abbildungen einführen, die *Lefschetz-Zahl*. Hier werden wir die Spur einer linearen Abbildung einsetzen.

7.22 Definition. Sei K ein Körper und V ein endlich dimensionaler K Vektorraum. Für einen linearen Endomorphismus (Selbstabbildung) $f\colon V \to V$ definieren wir die *Spur* auf folgende Weise: sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V, und $f(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j$. Dann definiere

$$\operatorname{Spur}(f) := \sum_{i=1}^n a_{ii} \in K.$$

7.23 Lemma. *Die Spur hat folgende aus der linearen Algebra wohlbekannten Eigenschaften:*

(1) *Die Spur ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Basis e_i ab, die zur Definition verwendet wurde.*

(2) *Die Spur ist eine lineare Abbildung* $\operatorname{Hom}_K(V, V) \to K$.

(3) *Für $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to V$ gilt* $\operatorname{Spur}(fg) = \operatorname{Spur}(fg)$.

(4) Sei folgendes Diagramm kommutativ mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \xrightarrow{p} & W & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \xrightarrow{p} & W & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Dann gilt $\operatorname{Spur}(g) = \operatorname{Spur}(f) + \operatorname{Spur}(h)$.

Proof. Wir wollen die letzte Aussage beweisen. Ergänze eine Basis $e_1, \dots, e_k$ von U zu einer Basis $e_1, \dots, e_n$ von V. Dann bilden die Vektoren $p(e_{k+1}), \dots, p(e_n)$ eine Basis von W. Sei f repräsentiert durch die Matrix A bezüglich $e_1, \dots, e_k$, und h repräsentiert durch die Matrix B bezüglich der Basis $p(e_{k+1}), \dots, p(e_n)$. Die zu f gehörige Matrix ist dann $\left(\begin{smallmatrix} A & * \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, und die Aussage folgt. □

7.24 Definition. Sei C_* ein endlich dimensionaler Kettenkomplex von K-Vektorräumen, K ein Körper und $f_*\colon C_* \to C_*$ eine (K-lineare) Kettenabbildung. Setze

$$L(f) : + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Spur}(f_k).$$

7.25 Satz. *Sei C_*, D_* endlich dimensionale Kettenkomplexe von K-Vektorräumen. Sei $f\colon C_* \to D_*$ und $g_*\colon D_* \to C_*$ (K-lineare) Kettenabbildungen. Dann gilt*

(1) $L(\mathrm{id}_C) = \chi(C)$.

(2) Falls $C_* = D_*$ ist $L(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{Spur}(H_k(f)\colon H_k(C_*) \to H_k(C_*))$.

(3) $L(fg) = L(gf)$.

Proof. $L(\mathrm{id}_C) = \chi(C_*)$ folgt sofort aus $\operatorname{Spur}(\mathrm{id}_V) = \dim(V)$ für jeden endlichen Vektorraum V, was wiederum eine direkte Konsequenz der Definition der Spur ist.

Die Berechnung der Lefschetzzahl mittels Homologie ist ganz ähnlich der entsprechenden Berechnung für die Eulercharakteristik in Satz 7.15. Wir nehmen also wieder an dass $C_k = 0$ für $k < 0$ und $C_k = 0$ für $k > n$ (kann man durch “verschieben der Indizes” erreichen), und beweisen den Satz per Induktion nach diesem n. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar, da dann C_* und $H_*(C)$ übereinstimmen.

Für den Induktionsschritt führen wir wieder den abgeschnittenen Kettenkomplex $\tilde{C}_*$ ein, mit $\tilde{C}_k = C_k$ für $k \le n$ und $\tilde{C}_k = 0$ für $k \ge n+1$. Dann gilt $H_k(\tilde{C}_*) = H_k(C_*)$ für $k < n$. Es gilt allerdings $H_n(\tilde{C}_*) = \ker(c_n)$, man hat also eine Projektion auf $H_n(C_*) = \ker(c_n)/\operatorname{im}(c_{n+1})$ und erhält somit folgendes Diagramm K-Vektorräumen mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{im}(c_{n+1}) & \longrightarrow & H_n(\tilde{C}_*) & \longrightarrow & H_n(C_*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f|_{\operatorname{im}(c_{n+1})}} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(\tilde{f})} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(f)} & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{im}(c_{n+1}) & \longrightarrow & H_n(\tilde{C}_*) & \longrightarrow & H_n(C_*) & \longrightarrow & 0, \end{array} \tag{7.26}$$

wobei $H_n(\tilde{f})$ die von f aus $H_n(\tilde{C}_*)$ induzierte Abbildung sein soll, während $H_n(f)$ die auf $H_n(C_*)$ induzierte Abbildung ist. Dieses Diagramm ist kommutativ. Wegen Lemma 7.23 erhält man also

$$\operatorname{Spur}(H_n(\tilde{f})) = \operatorname{Spur}(f|_{\operatorname{im}(c_{n+1})}) + \operatorname{Spur}(H_n(f)). \tag{7.27}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \operatorname{Spur}(f_k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \operatorname{Spur} H_k(\tilde{f}).$$

Für $k < n$ gilt ja $H_k(\tilde{f}) = H_k(f)$, und (7.27) bestimmt $H_n(\tilde{f})$. Wir müssen noch $\operatorname{Spur}(f|_{\operatorname{im}(c_{n+1})})$ berechnen. Hierfür ergibt sich das Diagramm mit exakten Zeilen (da $H_{n+1}(C_*) = \ker(c_{n+1})$)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H_{n+1}(C_*) & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & \operatorname{im}(c_{n+1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle H_n(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f|_{\operatorname{im}(c_{n+1})}} & & \\
0 & \longrightarrow & H_{n+1}(C_*) & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & \operatorname{im}(c_{n+1}) & \longrightarrow & 0.
\end{array} \tag{7.28}$$

Aus den Gleichungen (7.26),(7.27), (7.28) und Lemma 7.23 folgt also

$$\operatorname{Spur} f_{n+1} = \operatorname{Spur} H_{n+1}(f_*) + \operatorname{Spur} H_n(\tilde{f}) - \operatorname{Spur} H_n(f_*).$$

Somit

$$\begin{aligned}
L(f_*) &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k \operatorname{Spur}(f_k) = L(\tilde{f}_*) + (-1)^{n+1} \operatorname{Spur}(f_{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \operatorname{Spur} H_k(f) + (-1)^{n+1}(\operatorname{Spur} H_{n+1}(f) + \operatorname{Spur} H_n(\tilde{f}) - \operatorname{Spur} H_n(f)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \operatorname{Spur} H_k(f_*) + (-1)^n \operatorname{Spur} H_n(\tilde{f}_*) + (-1)^{n+1} \operatorname{Spur} H_{n+1}(f_*) \\
&\qquad - (-1)^n \operatorname{Spur} H_n(\tilde{f}_*) + (-1)^n \operatorname{Spur} H_n(f_*).
\end{aligned}$$

Die Eigenschaft $L(fg)$ folgt wieder direkt aus der entsprechenden Eigenschaft der Spur. □

7.29 Definition. Sei X ein endlicher CW-Komplex und $f\colon X \to X$ eine zelluläre Selbstabbildung. Definiere

$$L(f) := L(C_*^{cell}(f) \otimes \operatorname{id}_{\mathbb{Q}} \colon C_*^{cell}(X) \otimes \mathbb{Q} \to C_*^{cell}(X) \otimes \mathbb{Q}) \quad \in \mathbb{Q},$$

d.h. $L(f)$ ist die Lefschetzzahl der von f induzierten Abbildung auf dem rationalen zellulären Kettenkomplex.

7.30 Satz. *Sei X ein endlicher CW-Komplex und $f, g\colon X \to X$ ein zelluläre Abbildungen. Es gilt*

(1) $L(f) \in \mathbb{Z}$.

(2) $L(f) = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k \operatorname{Spur}(H_k(f) \colon H_k(X;\mathbb{Q}) \to H_k(X;\mathbb{Q}))$.

(3) *Sei hier* $f \colon X \to Y$ *und* $g \colon Y \to X$ *zelluläre Abbildungen zwischen endlichen CW-Komplexen. Dann gilt* $L(fg) = L(gf)$.

(4) $L(\mathrm{id}_X) = \chi(X)$.

(5) *Falls* $f \simeq g$, *dann gilt* $L(f) = L(g)$.

(6) *Sei* $i \colon X_0 \hookrightarrow X_1$ *die Einbettung eines Unterkomplexes eines endlichen CW-Komplexes und* $g \colon X_0 \to X_2$ *eine zelluläre Abbildung in einen endlichen CW-Komplex. Sei* X *das pushout von* $X_2 \xleftarrow{f} X_0 \xrightarrow{i} X_1$. $G \colon X_2 \to X$ *und* $J \colon X_1 \to X$ *sollen die zugehörigen Abbildungen ins pushout bezeichnen. Seien* $f_k \colon X_k \to X_k$ $(k = 0, 1, 2)$ *und* $f \colon X \to X$ *zelluläre Abbildung so dass* $Jif_0 = fJi$, $Gf_2 = fg$, $Jf_1 = fJ$. *Dann gilt*

$$L(f) = L(f_1) + L(f_2) - L(f_0).$$

Proof. Die zweite, dritte und vierte Aussage folgen direkt aus Satz 7.25. Man kann also die Lefschetzzahl aus der auf der Homologie induzierten Abbildung berechnen. Falls $f \simeq g$ gilt $H_*(f) = H_*(g)$, also auch $L(f) = L(g)$.

Um zu sehen, dass $L(f) \in \mathbb{Z}$ (a priori handelt es sich ja nur um eine rationale Zahl) beachte, dass

$$C_k^{cell}(X) \cong \bigoplus_{i \in I_k} \mathbb{Z}.$$

Der Endomorphismus $C_k(f) \colon C_k^{cell}(X) \to C_k^{cell}(X)$ übersetzt sich also zu einem Homomorphismus $\bigoplus_{i \in I_k} \mathbb{Z} \to \bigoplus_{i \in I_k} \mathbb{Z}$. Jeder solche Homomorphismus ist gegeben durch Multiplikation mit einer Matrix (a_{ij}) mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in I_k$.

Wir müssen nun den rationalen zellulären Kettenkomplex betrachten, also $C_k^{cell}(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i \in I_k} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i \in I_k} \mathbb{Q}$. Der zugehörige Endomorphismus $C_k(f) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ wird in dieser von der Basis der freien abelschen Gruppe (durch die Zellen gegeben) herkommenden Basis durch genau dieselbe Matrix (a_{ij}) beschrieben. Insbesondere gilt für die Spur: $\operatorname{Spur}(C_k(f) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}) = \sum_{i \in I_k} a_{ii} \in \mathbb{Z}$.

Für die letzte Aussage muss man nachprüfen, dass man folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen für die zellulären Kettenkomplexe des pushouts erhält:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_*^{cell}(X_0) \arrow[r, "\binom{i_*}{g_*}"] \arrow[d, "(f_0)_*"] & C_*^{cell}(X_1) \oplus C_k^{cell}(X_2) \arrow[r, "(J_* \; -G_*)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} (f_1)_* & 0 \\ 0 & (f_2)_* \end{pmatrix}"] & C_*^{cell}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*^{cell}(X_0) \arrow[r, "\binom{i_*}{g_*}"] & C_*^{cell}(X_1) \oplus C_k^{cell}(X_2) \arrow[r, "(J_* \; -G_*)"] & C_*^{cell}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Jetzt muss man nur noch Lemma 7.23 und die Definition der Lefschetzzahl anwenden. □

7.31 Definition. Sei $f \colon X \to X$ eine stetige Selbstabbildung eines endlichen CW-Komplexes. Sei g eine zu f homotope zelluläre Abbildung. Definiere $L(f) := L(g)$. Wegen des vorausgehenden Satzes ist die so definierte Lefschetzzahl wohldefiniert, denn wenn auch $g' \simeq f$ dann gilt $g' \simeq g$.

7.32 Satz. *Sei X ein endlicher CW-Komplex, $f\colon X \to X$ stetig. Falls $L(f) \neq 0$, dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es gibt $x \in X$ mit $f(x) = x$. Äquivalent, falls f keinen Fixpunkt hat, gilt $L(f) = 0$.*

7.33 Korollar. *Sei X ein endlicher CW-Komplex mit $H_k(X;\mathbb{Q}) \cong H_k(*;\mathbb{Q})$, also $H_0(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H_k(X;\mathbb{Q}) = 0$ für $k \neq 0$. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn X zusammenziehbar, also $X \simeq *$ ist.*

Sei $f\colon X \to X$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt.

Proof. Da $H_0(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, ist X zusammenhängend. Jede stetige Abbildung induziert deshalb auf H_0 die Identität. (Dies folgt wie die entsprechende Aussage für $H_0(X)$ mit ganzzahligen Koeffizienten in Lemma 5.11). In der homologischen Formel für Lefschetzzahl von f gibt es deshalb nur einen Summanden, und dieser ist $L(f) = \mathrm{Spur}(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}) = 1$. Wegen Satz 7.32 hat f mindestens einen Fixpunkt. □

7.34 Bemerkung. In Korollar 7.33 ist wichtig, dass X ein endlicher CW-Komplex (also kompakt) ist. Ansonsten betrachte man $X = \mathbb{R}$, sicher zusammenziehbar, und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Verschiebung, die natürlich keinen Fixpunkt hat.

Beweisidee zu Satz 7.32. Sei zunächst X ein endiches Polyeder. Zur Erinnerung: das heisst, dass $X \subset \mathbb{R}^N$, und X ist die Vereinigung von endlich vielen geometrischen Simplizes (also konvexen affinen Linearkombinationen von Ecken des Simplex).

Wir nehmen nun an, dass f keinen Fixpunkt hat, also $f(x) \neq x$ für alle $x \in X$. Da X kompakt ist, existiert $\epsilon > 0$ so dass $d(f(x), x) > \epsilon$ für alle $x \in X$.

Durch Unterteilen der Simplizes des Polyeders X kann man nun erreichen, dass $d(f(\sigma), \sigma) > \epsilon' > 0$ für jedes der (neuen, kleineren) Simplizes von X. Nun findet man, nachdem man ggf. X weiter in kleinere Simplizes unterteilt hat, eine zu f homotope und zelluläre Abbildung, die zudem (in der sup-Norm), sehr nahe an f liegt. Dies kann man so einrichten, dass für die zelluläre Abbildung, die wir der Einfachheit halber wieder f nennen wollen, weiterhin gilt $d(f(\sigma), \sigma) > \epsilon'' > 0$. Wir behaupten nun, dass für eine solche zelluläre Abbildung notwendigerweise $L(f) = 0$ ist. Dies folgt aus Lemma 7.36, wo die von f auf dem zellulären Kettenkomplex induzierte Abbildung genau berechnet wird. Nach Wahl von pushouts ist diese gegeben durch eine Matrix (a_{ij}), und im Beweis von Satz 7.30 haben wir beobachtet, dass in die Lefschetzzahl genau die Diagonalelemente a_{ii} eingehen, die ja nach Lemma 7.36 in unserer Situation alle Null sind, also auch $L(f) = 0$.

Für einen allgemeinen endlichen CW-Komplex kann man das “Unterteilen” kaum präzise machen. Stattdessen verwenden wir (ohne es hier zu beweisen), dass jeder CW-Komplex von einem Polyeder “dominiert” wird:

7.35 Satz. *Sei X ein endlicher CW-Komplex. Dann gibt es ein endliches Polyeder K und eine Inklusion $i\colon X \hookrightarrow K$, sowie eine Retraktion (stetige Abbildung) $r\colon K \twoheadrightarrow X$, so dass $r \circ i = \mathrm{id}_X$.*

Für die Berechnung der Lefschetzzahl betrachte nun die Selbstabbildung $ifr\colon K \to K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L(ifr) &= \sum (-1)^k \operatorname{Spur}(H_k(ifr)) = \sum (-1)^k \operatorname{Spur}(H_k(i) \circ H_k(f) \circ H_k(r)) \\ &= \sum (-1)^k \operatorname{Spur}(H_k(f) \circ H_k(r) \circ H_k(i)) = \sum (-1)^k \operatorname{Spur}(H_k(f)) = L(f). \end{aligned}$$

Hier verwenden wir die Spureigenschaft $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$ sowie Funktorialität von Homologie. Nach Voraussetzung ist $L(f) \neq 0$. Nach der Konstruktion für Polyeder hat also ifr einen Fixpunkt $x \in K$. Dann gilt für $fx \in X$:

$$f(rx) = (ri) \circ fr(x) = r \circ ifr(x) = rx,$$

also ist rx ein Fixpunkt von f. □

7.36 Lemma. *Sei $f\colon X \to Y$ eine zelluläre Abbildung zwischen zwei CW-Komplexen. Seien $q_i\colon S^{k-1} \to X_{k-1}$ und $Q_i\colon D^k \to X_k$ die anheftenden bzw. die charakteristischen Abbildungen der Zell $i \in I_k$ von X (d.h. man wählt geeignete pushouts). Entsprechend $p_j\colon S^{k-1} \to Y_{k-1}$ und $P_j\colon D^k \to Y_k$.*

Diese Wahl von pushouts liefert Isomorphismen $C_k^{cell}(X) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i\in I_k(X)} \mathbb{Z}$, und $C_k^{cell}(Y) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j\in I_k(Y)} \mathbb{Z}$. Die induzierte Abbildung f_* wird dann durch eine Matrix (a_{ij}) mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ beschrieben, die dadurch definiert ist, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} C_k^{cell}(X) \arrow[r, "C_k^{cell}(f)"] \arrow[d, "\cong"] & C_K^{cell}(Y) \arrow[d, "\cong"] \\ \bigoplus_{i\in I_k(X)} \mathbb{Z} \arrow[r, "(a_{ij})"] & \bigoplus_{j\in I_k(Y)} \mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

Zur Berechnung des Eintrags a_{ij} betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} (D^k, S^{k-1}) \arrow[r, "(Q_i,q_i)"] \arrow[ddd] & (X_k, X_{k-1}) \arrow[r, "f|"] & (Y_k, Y_{k-1}) \arrow[d] \\ & & (Y_k, Y_k - e_j^\circ) \arrow[dd] \\ & & \\ (D^k/S^{k-1}, *) \arrow[rr, "(\overline{Q}_j,*)"] \arrow[d, "\approx"'] & & (Y_k/Y_k - e_j^\circ, *) \arrow[d, "\approx"'] \\ (S^k, *) \arrow[rr, "\phi_{ij}"] & & (S^k, *) \end{tikzcd}$$

Der Matrixeintrag a_{ij} ist gegeben durch den Abbildungsgrad von ϕ_{ij}, was so definiert wird, dass obiges Diagramm kommutiert.

Falls das Bild unter f der Zelle i in X das Innere der Zelle j in Y nicht trifft, liest man dem Diagramm ab, dass ϕ_{ij} die konstante Abbildung auf den Basispunkt ist. Insbesondere ist dann ihr Abbildungsgrad Null, also $a_{ij} = 0$.

Proof. Es handelt sich hier um eine “Diagrammjagd”, unter Berücksichtigung der Definition der Isomorphismen $C_k^{cell}(X) \cong \bigoplus \mathbb{Z}$. Die Details entsprechen denen der Berechnung der Differentiale im zellulären Kettenkomplex als Abbildungsgrade in Lemma 6.23, sind sogar eher einfacher. □

Den Lefschetz-Fixpunktsatz auf die Identität anzuwenden, scheint nicht gar zu viel Sinn zu machen, da hier jeder Punkt Fixpunkt ist. Andererseits ist attraktiv, dass $L(\mathrm{id}_X) = \chi(X)$. Der Satz macht aber doch Sinn in folgender Form: falls $\chi(X) \neq 0$, hat jede Abbildung, die homotop zur Identität ist, einen Fixpunkt.

7.3 Lefschetzzahlen und glatte Mannigfaltigkeiten

Der Stoff dieses Abschnitts wurde nicht in der Vorlesung behandelt.

8 Produkte auf Kohomologie und Homologie

In diesem Abschnitt werden wir sehen, warum Kohomologie eingeführt wird (und in der Praxis sogar viel häufiger verwendet wird als Homologie). Einer der Gründe ist, dass man relativ einfach auf der Kohomologie mehr algebraische Struktur definieren kann: es handelt sich um einen Ring (man hat also ein Produkt mit geeigneten Eigenschaften).

Zur Erinnerung: in der de Rham Kohomologie glatter Mannigfaltigkeiten induziert das Dach-Produkt von Differentialformen ein Produkt $H^p_{dR}(M) \times H^q_{dR}(M) \to H^{p+q}_{dR}(M)$. Eine solche Konstruktion wollen wir für singuläre Kohomologie, und damit für beliebige Räume durchführen.

8.1 Kreuzprodukt (äusseres Produkt)

Zunächst definieren wir allerdings, was einfacher geht, ein äusseres Produkt, was die Homologie zweier Räume mit der Homologie des Produkts der Räume verbindet (diese äussere Produkt existiert für Homologie und Kohomologie).

Wir starten mit einem algebraischen Lemma.

8.1 Lemma. *Seien C_* und D_* Kettenkomplexe. Dann induziert die kanonische Abbildung zum Tensorprodukt $C_* \times D_* \to C_* \otimes D_*$ eine “Produkt”-Abbildung*

$$H_p(C) \times H_q(D) \to H_{p+q}(C \otimes D).$$

Diese Abbildung ist bilinear, induziert also wieder (wegen der universellen Eigenschaft) eine Abbildung

$$H_q(C) \otimes H_q(D) \to H_{p+q}(C \otimes D).$$

Ausserdem sind die Abbildungen verträglich mit den von Kettenabbildungen $f\colon C_* \to C'_*$, $g\colon D_* \to D'_*$ und $f \otimes g\colon C \otimes D \to C' \otimes D'$ auf Homologie induzierten Abbildungen.

Proof. Sei $x \in C_p$, $y \in D_q$ mit $c(x) = 0$ und $d(y) = 0$. Sei δ die Randabbildung in $C \otimes D$. Dann gilt

$$\delta(x \otimes y) = c(x) \otimes y \pm x \otimes d(y) = 0,$$

also wird der Kern der Differentiale auf den Kern des Differentials abgebildet. Wir müssen jetzt noch zeigen, dass die Homologieklasse des Bildes (also des Tensorprodukts) unabhängig ist von der Wahl der Repräsentanten. Sei dazu $x' \in C_{p-1}$, $y' \in D_{q-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned}(x + c(x')) \otimes (y + d(y')) =& x \otimes y + x \otimes d(y') + c(x') \otimes (y + d(y')) \\ =& x \otimes y \pm (\underbrace{c(x)}_{=0} \otimes y' \pm x \otimes d(y')) + \\ & (c(x') \otimes (y + d(y')) \pm x - \otimes \underbrace{d(y + d(y'))}_{=0}) \\ =& \; x \otimes y \pm \delta(x \otimes y') + \delta(x' \otimes (y + d(y'))).\end{aligned}$$

Verträglichkeit mit Kettenabbildungen ist tautologisch auf dem Niveau des Kettenkomplexes (so ist ja gerade $f \otimes g$ definiert), ergibt sich also automatisch auch beim Übergang zu Homologie, da man nur Vertreter betrachten muss. Die Behauptung folgt. □

8.2 Bemerkung. Produktabbildungen sind (in der Regel) bilinear. Man kann sie also immer aufgefasst denken einmal auf dem Kreuzprodukt der Faktoren, oder auf dem Tensorprodukt der Faktoren. Wir werden, ohne es weiter zu erwähnen, oft beide Varianten benutzen, so wie es im Lemma 8.1 explizit dargestellt ist.

8.3 Korollar. *Seien X und Y endliche CW-Komplexe. Es gibt ein natürliches Kreuzprodukt*

$$\times \colon H_p^{cell}(X) \otimes H_q^{cell}(Y) \to H_{p+q}^{cell}(X \otimes Y),$$

induziert vom (natürlichen) Isomorphismus von Kettenkomplexen $C_*^{cell}(X) \otimes C_*^{cell}(Y) \to C_*^{cell}(X \times Y)$.

Dieses Korollar überträgt sich nicht sofort auf singuläre Homologie, da der singuläre Kettenkomplex von $X \times Y$ in der Regel nicht mit dem Tensorprodukt der einzelnen singulären Kettenkomplexe übereinstimmt. Das ist aber auch gar nicht nötig, da wir das ganze ja nur auf Homologie haben wollen. Folgender Satz ist also sehr nützlich:

8.4 Satz. *Eilenberg-Zilber*
Für beliebige Räume X, Y gibt es eine natürliche Kettenhomotopie

$$\times \colon C_*^{sing}(X) \otimes C_*^{sing}(Y) \to C_*^{sing}(X \times Y).$$

Proof. Der Beweis dieses Satzes ist technisch schwer, verliert sich aber in sehr vielen Einzelheiten. Wir wollen daher nur die Idee zur Konstruktion der Kettenabbildung $\times$ angeben.

Dazu muss man $\sigma \colon \Delta^p \to X$ und $\mu \colon Delta^q \to Y$ eine singuläre $(p+q)$-Kette von $X \times Y$ zuordnen. Man würde dem Paar natürlich gerne die Abbildung $\sigma \times \mu \colon Delta^p \times \Delta^q \to X \times Y$ zuordnen. Dies ist allerdings kein singulärer $(p+q)$-Simplex von $X \times Y$, da $\Delta^p \times \Delta^q$ nicht das Standard-$(p+q)$-Simplex ist. Genau das gleiche Problem mussten wir beim Beweis der Homotopieinvarianz von singulärer Homologie lösen, dort war einer der Faktoren das Einheitsinterval (also ein 1-Simplex). Die Idee ist, $\Delta^p \times \Delta^q$ in $(p+q)$-Simplizes zu unterteilen, also geeignete Abbildungen $f_i\colon \Delta^{p+q} \to \Delta^p \times \Delta^p$ zu finden, so dass man $\sigma \otimes \mu$ die Summe

$$\sum_i \pm(\sigma \times \mu) \circ f_i\colon \Delta^{p+q} \xrightarrow{f_i} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{\sigma\times\mu} X \times Y$$

zuordnet, und damit eine Kettenabbildung, genauer sogar eine Kettenhomotopieäquivalenz definiert.

Es ist klar, dass jede solche Definition natürlich ist, also mit Abbildungen $f\colon X \to X'$, $g\colon Y \to Y'$, und der zugehörigen $f\times g\colon X\times Y \to X'\times Y'$ verträglich ist. $\square$

8.5 Korollar. *Man hat ein natürliches äusseres Produkt*

$$\times H_p^{sing}(X) \otimes H_q^{sing}(Y) \to H_{p+q}^{sing}(X \times Y).$$

Proof. Verknüpfe das nach Lemma 8.1 immer gegebene Produkt in die Homologie von $C_*^{sing}(X) \otimes C_*^{sing}(Y)$ mit dem von einer Eilenberg-Zilber Abbildung auf Homologie induzierten Isomorphismus nach $H_*(X \times Y)$. $\square$

8.6 Bemerkung. Indem man die Konstruktionen dualisiert, kann man entsprechend äussere Produkte auf Kohomologie konstruieren, also

$$\times\colon H^p(X) \otimes H^q(Y) \to H^{p+q}(X \times Y).$$

Dies funktioniert sowohl mit zellulärer als auch mit singulärer Kohomologie.

8.7 Lemma. *Seien X, Y topologische Räume bzw. CW-Komplexe. Dann gibt es die Spiegelungsabbildung $T\colon X \times Y \to Y \times X\colon (x,y) \mapsto (y,x)$.*

Für die äusseren Produkte (in Homologie und Kohomologie, singulär und zellulär) gilt nun folgende Version von graduierter Kommutativität:

$$T^*(a \times b) = (-1)^{pq}(b \times a) \in H^{p+q}(Y \times X)$$

(in der $(p+q)$-ten (Ko)homologie von $X\times Y$), falls $a \in H^p(X)$ und $b \in H^q(Y)$. Entsprechend für Homologie.

Proof. Wir geben nur die Idee für zelluläre Homologie. In diesem Fall gilt die entsprechende Formel schon für Elemente des zellulären Kettenkomplexes, was wir nur für die Erzeuger dieser Kettenkomplexe nachrechnen müssen. Nach Wahl von pushouts sei etwa $Q\colon D^p \to X$ die charakteristische Abbildung einer p-Zelle von X und $P\colon D^q \to Y$ die charakteristische Abbildung einer q-Zelle von Y. Diese repräsentieren freie Erzeuger a bzw. b der zellulären Kettenkomplexe (genauer gesagt, die induzierte Abbildung $\mathbb{Z} = H_p(D^p, S^{p-q}) \to H_p(X_p, X_{p-1}) = C_p^{cell}(X)$ bildet die $1 \in \mathbb{Z}$ auf diesen Erzeuger ab).

Das Produkt $a\times b$ dieser beiden Elemente der Kettenkomplexe in $C_{p+q}^{cell}(X \times Y)$ ist repräsentiert durch $D^{p+q} \xrightarrow{\alpha}_{\approx} D^p\times D^q \xrightarrow{Q\times P} X\times Y$. Wenn man jetzt mit $T\colon X\times Y \to Y\times X$ verknüpft, erhält man einen Repräsentanten für $T_*(a\times b)$, das

Bild unter der von T auf dem zellulären Kettenkomplex induzierten Abbildung. Wir haben folgendes kommutative Diagramm von Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccc}
D^{p\times q} & \xrightarrow[\alpha]{\approx} & D^p \times D^p & \xrightarrow[Q\times Q]{} & X\times Y \\
\downarrow{\scriptstyle \bar t} & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle T} \\
D^{q\times p} & \xrightarrow[\alpha]{\approx} & D^q \times D^p & \xrightarrow[P\times Q]{} & X\times Y.
\end{array}$$

Hier ist t die Spiegelung von $D^p \times D^q$, und $\bar t$ die zugehörige Selbstabbildung von $D^{p\times q}$. Hierbei ist wichtig, dass die Homöomorphismen α ein für alle mal festgelegt sind (deswegen kann man den Homöomorphismus $\bar t$ nicht einfach durch die Identität ersetzen). Wir sehen, dass $T_*(a\times b) = \deg(\bar t) b\times a$, wobei $\deg(\bar t) \in \pm 1$ die durch $\bar t$ auf $H_{p+q}(D^{p+q}, S^{p+q-1}) = \mathbb{Z}$ induzierte Abbildung ist. Hierfür kann man zeigen, dass man $(-1)^{pq}$ erhält. □

8.2 Cup-Produkt

Wir wollen uns nicht weiter mit dem äusseren Produkt beschäftigen, sondern das innere Produkt auf Kohomologie einführen. Dies kann man recht einfach mittels des äusseren Produktes tun, wir werden danach aber auch eine vollkommen explizite Konstruktion durchführen.

8.8 Definition. Für einen Raum X definiere das *cup-Produkt*

$$\cup\colon H^p(X)\otimes H^q(X) \to H^{p+q}(X)$$

also Komposition

$$H^p(X)\otimes H^q(X) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X\times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X).$$

Hierbei ist $\Delta\colon X \to X\times X\colon x \mapsto (x,x)$ die Diagonalabbildung. Da Kohomologie kontravariant ist, kommt man so zurück zur Kohomologie von X.

Die einzigen immer existierenden Abbildungen $X\times X \to X$. die man für ein entsprechendes homologisches Produkt benutzen könnte, sind die Projektionsabbildungen. Diese induzieren aber kein interessantes Produkt, da in einer Homologieklasse $a\times b$ von $X\times X$ die Information von a im ersten Faktor konzentriert ist, diejenige von b im zweiten Faktor. Wenn man also auf die entsprechenden Faktoren projeziert, verliert man die Hälfte der interessierenden Information.

Für die explizite Definition des cup-Produkts benutzen wir folgende Definition:

8.9 Definition. Die *Alexander-Whitney Diagonalapproximation* ist gegeben als

$$\Delta\colon C_*^{sing}(X) \to C_*^{sing}(X)\otimes C_*^{sing}(X)\colon (\sigma\colon \Delta^n \to X) \mapsto \sum_{p=0}^{n} f_p(\sigma)\otimes b_q(\sigma).$$

Hierbei ist $f_p(\sigma)$ die p-dimensionale *Vorderseite* von σ, $b_q(\sigma)$ die q-dimensionale *Hinterseite*, gegeben durch

$$f_p(\sigma)\colon \Delta^p \xrightarrow{e_i\mapsto e_i} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X,$$
$$b_q(\sigma)\colon \Delta^p \xrightarrow{e_i\mapsto e_{n-q+i}} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X.$$

Wie üblich beschreiben wir die Inklusionen $\Delta^p \hookrightarrow \Delta^n$, $\Delta^q \hookrightarrow \Delta^n$, indem wir angeben, wie die Ecken, also die Standard-Basisvektoren $e_0, \dots, e_p$ abgebildet werden. Die Abbildung muss dann affin linear fortgesetzt werden.

8.10 Lemma. *Die Alexander-Whitney Diagonalapproximation ist eine natürliche Kettenabbildung.*

Proof. Natürlichkeit folgt sofort aus der Definition. Dass es sich um eine Kettenabbildung handelt, ist eine längliche, aber elementare Rechnung, wie wir schon einige gesehen haben. □

Wir sind nun in der Lage, eine explizite Definition des cup-Produkts auf singulärer Kohomologie zu geben. Es sei daran erinnert, dass für eine abelsche Gruppe R $C^p_{sing}(X;R)$ definiert war als $\mathrm{Hom}(C_p^{sing}(X), R)$. Die Randabbildung $\delta\colon C^p(X;R) \to C^{p+1}(X;R)$ war gegeben durch dualisieren der Randabbildung $\partial\colon C_{p+1}(X) \to C_(X)$, d.h. für $f\colon C_p(X) \to R$ (ein Element des Kokettenkomplexes) ist $\delta f = f \circ \partial$.

8.11 Definition. Ein *Ring* R ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (Addition und Multiplikation), wobei R bezüglich $+$ eine abelsche Gruppe ist (mit neutralem Element 0). Die Multiplikation soll assoziativ sein und die Distributivgesetze erfüllen.

Falls die Multiplikation kommutativ ist, sprechen wir von einem *kommutativen Ring*. Falls $1 \in R$ existiert mit $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ für alle a, so heisst R ein *Ring mit* 1. Beispiele: $\mathbb{Z}$ und Körper.

Ein *Modul* über R ist eine abelsche Gruppe M mit einer Multiplikation $R \times M \to M$, die alle Vektorraumaxiome erfüllt, d.h. distributiv und assoziativ ist und (falls R eine 1 hat) mit $1 \cdot v = v$ für alle $v \in M$. Assoziativ heisst $(rs)v = r(sv)$ für $r, s \in R$, $v \in M$. Genauer handelt es sich um einen Links-R-Modul.

8.12 Definition. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Für $f \in C^p(X;r)$, $g \in C^q(X;R)$ setze

$$f \cup g(\sigma) := f \otimes g(E\Delta\sigma) = (-1)^{pq} f(f_p(\sigma)) \cdot g(b_q(\sigma)) \in R.$$

Hier ist $\sigma\colon \Delta^{p+q} \to X$ ein singulärer $(p+q)$-Simplex. E ist ein Vorzeichen-Operator, eingeschränkt auf $C_p \otimes C_q$ soll er gegeben sein durch Multiplikation mit $(-1)^{pq}$.

Beachte, dass wir am Ende das Produkt in R benutzen, diese Definition also nur für Ringe Sinn macht.

8.13 Lemma. *Das cup-Produkt auf singulärer Kohomologie hat folgende Eigenschaften:*

(1) $\delta(f \cup g) = (-1)^q (\delta f) \cup g + f \cup (\delta g)$.

(2) $(f \cup g) \cup h = f \cup (g \cup h)$.

(3) Definiere die Kokette $\epsilon \in C^0(X;R)$ *durch* $\epsilon(\sigma^0\colon \Delta^0 \to X) := 1$ *für jedes singuläre Null-Simplex* σ^0 *(also für jeden Punkt in* X*). Dann gilt*

$$f \cup 1 = f = 1 \cup f.$$

(4) *Falls* $\delta f = 0$ *und* $\delta g = 0$, *gilt*

$$f \cup g - (-1)^{pq} g \cup f \in \mathrm{im}(\delta).$$

(5) *Das cup-Produkt ist natürlich, d.h. für* $\alpha\colon Y \to X$ *gilt*

$$\alpha^*(f \cup g) = (\alpha^* f) \cup (\alpha^* g).$$

(6) *Sei* $A \subset X$. *Man kann in kanonischer Weise*

$$C^p(X, A; R) = \mathrm{Hom}(C_p(X)/C_p(A), R)$$

mit einer Untermenge von $C^p(X; R)$ *identifizieren: es handelt sich genau um die Homomorphismen* $f\colon C_p(X) \to R$, *die auf der Untergruppe* $C_p(A)$ *Null sind. Es gilt: falls* $f \in C^p(X, A; R)$, *dann ist auch* $f \cup g \in C^{p+q}(X, A; R)$, *und entsprechend falls* $g \in C^q(X, A; R)$.

8.14 Satz. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Das cup-Produkt auf singulärer Kohomologie induziert ein natürlich cup-Produkt*

$$\cup\colon H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) \to H^{p+q}(X; R)$$

mit folgenden Eigenschaften: seinen $a \in H^p(X; R)$, $b \in H^q(X; R)$ *und* $c \in H^r(X; R)$.

(1) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$.

(2) $a \cup b = (-1)^{pq} b \cup a$.

(3) *Falls* $f\colon Y \to X$ *,so ist* $f^*(a \cup b) = (f^* a) \cup (f^* b)$.

(4) $a \cup 1 = a = 1 \cup a$. *Hier ist 1 die von* $\epsilon \in C^0(X; R)$ *aus Lemma 8.13 repräsentierte Kohomologieklasse.*

(5) *Sei* $i\colon A \to X$ *die Inklusion eines Unterraums. Dann gibt es ein cup-Produkt*

$$\cup\colon H^q(X, A; R) \otimes H^p(X; R) \to H^{p+q}(X, A; R).$$

Folgendes Diagramm ist kommutativ, wobei die horizontalen Abbildungen die Randabbildungen der langen exakten Paarsequenz sind (bzw. deren Tensorprodukt mit der identischen Abbildung):

$$\begin{array}{ccc} H^q(A; R) \otimes H^p(X; R) & \longrightarrow & H^{q+1}(X, A; R) \otimes H^p(X; R) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \cup \circ (\mathrm{id} \otimes i^*)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle =\cup} \\ H^{p+q}(A; R) & \longrightarrow & H^{p+q+1}(X, A; R). \end{array}$$

(6) *Falls* $u \in H^r(Y; R)$ *und* $v \in H^s(Y; R)$ *gilt für folgende Kohomologieklassen von* $X \times Y$:

$$(a \times u) \cup (b \times v) = (-1)^{rq} (a \cup b) \times (u \cup v).$$

Insbesondere gilt $(a \times 1) \cup (1 \times v) = (a \times v)$.

8.15 Bemerkung. Sei $p_X: X \times Y \to X: (x, y) \mapsto x$ die Projektion auf X, und $p_Y: X \times Y \to Y$ die Projektion auf Y. Dann gilt $(a \times 1) = p_X^*(a)$, sowie $(1 \times b) = p_Y^*(b)$. Man kann also das äussere Kreuzprodukt mit Hilfe des cup-Produkts definieren.

Der Satz zeigt, dass $H^*(X; R)$ mittels des cup-Produkts ein assoziativer Ring mit 1 wird, der ausserdem graduiert kommutativ ist (d.h. kommutativ bis auf das fest vorgegebene Vorzeichen). Ausserdem sind $H^*(A; R)$ und $H^*(X, A; R)$ Moduln über diesem Ring (falls $b \in H^*(A; R)$ und $a \in H^*(X; R)$ ist $a \cup b := (i^*a) \cup b$). Die Randabbildung der langen exakten Paarsequenz ist eine Modulabbildung.

8.16 Notation. Oft schreibt man statt $a \cup b$ einfach ab. Insbesondere ist a^n das n-fache cup-Produkt von a mit sich selbst.

Merkregel für das Vorzeichen: beim Vertauschen eines Objekts vom Grad p mit einem Objekt von Grad q erhält man das Vorzeichen $(-1)^{pq}$. Beispiele:

- Das cup-Produkt.
- Die Relation zwischen Kreuzprodukt und cup-Produkt.
- Differentiale haben Grad 1 oder -1. So erklärt sich das Vorzeichen im Differential eines Tensorprodukts von Kettenkomplexen (das Differential muss mit dem ersten Faktor vertauscht werden).
- Bei der Definition des Alexander-Whitney cup-Produkts muss g mit einem Teil von σ vertauscht werden, daher das Vorzeichen $(-1)^{pq}$.

8.17 Beispiel. Leider ist es, wie bei der singulären Homologie auch, nicht sehr einfach, aus der Definition direkt das cup-Produkt zu berechnen. Wir werden es für $\mathbb{R}P^2$ mit $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten durchführen. Hier wissen wir bereits, dass $H^k(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ falls $k = 0, 1, 2$, und 0 sonst. Sei $a \in H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2)$ ungleich Null. Wir wollen $a^2 \in H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2)$ bestimmen. Da das nicht-triviale Element $1 \in H^0(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2)$ die Eins der Ringstruktur liefert, und alle anderen Produkte aus Dimensionsgründen Null sind, haben wir mit a^2 die gesamte Ringstruktur bestimmt.

Sei $f: C_1 \to \mathbb{Z}/2$ ein Repräsentant von a. Es gilt also insbesondere $\delta f = 0$.

Sei $\sigma: \Delta^1 \to S^1 = \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^2$. Hier gilt $\partial(\sigma) = 0$ (tatsächlich erzeugt σ $H_1(\mathbb{R}P^2)$). Wir wollen nun die Tatsache benutzen, dass $f(\sigma) = 1$ (es würde ausreichen, wenn die Kokette f so gewählt werden kann, tatsächlich ist dies aber automatisch immer der Fall, wenn $[f] = a$). Sei $\mu: \Delta^2 \to \mathbb{R}P^2$ eine Anklebeabbildung für die 2-Zelle, die die Vorder- und Rückseite genau auf σ (also $\mathbb{R}P^1$) abbildet, die fehlende Seitenkante auf einen Punkt. Dann gilt $\partial(\mu) = 2\sigma - c_1$, wobei $c_1: \Delta^1 \to \mathbb{R}P^2$ die konstante Abbildung auf einen Basispunkt ist. Weiter ist $f_1(\mu) = \sigma = b_1(\sigma)$. Aus der Definition erhalten wir nun

$$f^2(\mu) = -f(\sigma) \cdot f(\sigma) = 1 \in \mathbb{Z}/2.$$

Sei $c_2: \Delta^2 \to \mathbb{R}P^2$ ebenfalls eine konstante Abbildung. Dann ist $\partial(c_2) = c_1$ und $f_1(c_2) = c_1 = b_1(c_2)$, folglich $f^2(c_2) = 0$ (da $f(c_1) = f(\partial c_2) = \delta f(c_2) = 0$).

Nimm nun an $a^2 = 0$. Das heisst $f^2 = \delta g$ für geeignetes $g \in C^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2)$. Man erhält

$$\begin{aligned} 1 &= f^2(\mu) = \delta g(\mu) = g(\partial\mu) = g(2\sigma - c_1) \\ &= 2g(\sigma) - g(c_1) = g(\partial c_2) = \delta g(c_2) = f^2(c_2) \end{aligned}$$
$$= 0 \in \mathbb{Z}/2.$$

Dies ist ein Widerspruch, also gilt $a^2 \neq 0$.

8.18 Beispiel. Es gilt allgemeiner

$$H^p(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) = a^p\mathbb{Z}/2,$$

wobei $a \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2)$ der Erzeuger.

Ausserdem gilt $H^2k(\mathbb{C}P^n) = b^k\mathbb{Z}$, wobei b Erzeuger von $H^2(\mathbb{C}P^n)$.

In beiden Fällen handelt es sich also um "abgeschnittene" Polynomringe in den "Variablen" a bzw. b, d.h. $a^{n+1} = 0$ und $b^{n+1} = 0$.

Um diese Berechnungen durchzuführen, ist es günstig, noch etwas mehr Theorie einzuführen, was wir hier nicht tun werden. In der Praxis wird fast immer versucht, nicht nur die Homologie, sondern den Kohomologiering (mit der Produktstruktur) auszurechnen. In der Regel spricht man erst wenn dies gelungen ist davon, dass die (Ko)homologie berechnet ist.

8.19 Beispiel. $H^*(S^2 \times S^2)$ kann man mittels des Kreuzprodukts berechnen. Wir wissen $H^2(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z}^2$, und wir können Erzeuger $a \times 1$ und $1 \times b$ wählen, wobei $a \in H^2(S^2)$ ein Erzeuger der zweiten Kohomologie des ersten Faktors ist, $b \in H^2(S^2)$ entsprechend für den zweiten Faktor. Weiter ist $H^4(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$ mit Erzeuger $a \times b$. Weiter ist $H^0(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt vom Element 1 des Kohomologierings. Alle anderen Kohomologiegruppen sind Null.

Um die Produktstruktur zu bestimmen, müssen wir also nur noch die Produkte $(a \times 1) \cup (a \times 1) = (a \cup a) \times (1 \cup 1) = 0$, $(a \times 1) \cup (1 \times b) = a \times b$ sowie $(1 \times b) \cup (1 \times b) = (1 \cup 1) \times (b \cup b) = 0$ berechnen.

Beachte, dass $a^2 = 0 = b^2$ aus Dimensionsgründen.

Wir können diese Rechnungen benutzen, um zu zeigen, dass $S^2 \times S^2$ nicht homotopieäquivalent zu $S^2 \vee S^2 \vee S^4$ ist, obwohl die Homologiegruppen isomorph sind. Zur Erinnerung: bei einem Wedge von Sphären ist die Homologie (und Kohomologie), ausser in Dimension Null, die direkte Summe der Homologiegruppen der Summanden, und die Isomorphismen ist gegeben durch die kanonischen Einbettungen der Summanden, bzw. der Projektionen auf die Summanden. Sei also $p\colon S^2 \vee S^2 \vee S^4 \to S^2 \vee S^2$ die Projektion. Es gilt $H^2(S^2 \vee S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, aber $H^4(S^2 \vee S^2) = 0$. Also ist jedes cup-Produkt $a \cup b \in H^4(S^2 \vee S^2)$ von Elementen aus $a, b \in H^2(S^2 \vee S^2)$ Null. Demzufolge auch $p^*a \cup p^*b = p^*0 = 0$. Da $H^2(S^4) = 0$, ist p^* ein Isomorphismus auf H^2. Also ist das cup-Produkt zweier beliebiger Elemente aus $H^2(S^2 \vee S^2 \vee S^4)$ Null.

Wäre nun $f\colon S^2 \vee S^2 \vee S^4 \to S^2 \times S^2$ eine Homotopieäquivalenz, so wäre $0 \neq f^*((a \times 1) \cup (1 \times b))$ (da f^* Iso auf Kohomologie), aber andererseits $f^*(a \times 1) \cup f^*(1 \times b) = 0$ (als Produkt von Elementen aus $H^2(S^2 \vee S^2 \vee S^4)$). Also kann es f nicht geben.

8.3 Cap-Produkt

Es gibt noch weitere Produkte auf Homologie und Kohomologie. Zwar ist das cup-Produkt das wichtigste, da es als einziges eine Ringstruktur induziert. Die anderen Produkte werden aber durchaus auch benutzt. Das jetzt zu definierende cap-Produkt ist ein Produkt $\cap\colon H^p(X;R) \times H_q(X;R) \to H_{q-p}(X;R)$.

Wir definieren es zunächst auf den simplizialen (Ko)kettenkomplexen:

8.20 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Definiere

$$\begin{aligned} \cap\colon C^p_{sing}(X) \otimes C^{sing}_{p+r}(X) &\to C^{sing}_r(X) \\ f \otimes \sigma &\mapsto (1 \otimes f)E\Delta\sigma = f_r(\sigma) \cdot f(b_p(\sigma)) \cdot (-1)^{pr}. \end{aligned}$$

Hier sind f_r und b_p die Vorder- und Rückseitenhomomorphismen. E ist ein Vorzeichenoperator, eingeschränkt auf $C_p \otimes C_q$ ist er gegeben durch Multiplikation mit $(-1)^{pq}$.

Sei allgemeiner R ein kommutativer Ring mit 1. Die selben Formeln liefern uns auch cap-Produkte

$$\begin{aligned} \cap\colon C^p_{sing}(X;R) \otimes C^{sing}_{p+r}(X;R) &\to C^{sing}_r(X;R) \\ \cap\colon C^p_{sing}(X) \otimes C^{sing}_{p+r}(X;R) &\to C^{sing}_r(X;R) \\ \cap\colon C^p_{sing}(X;R) \otimes C^{sing}_{p+r}(X) &\to C^{sing}_r(X;R) \end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir die kanonischen Isomorphismen $R \otimes R = R = R \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \otimes R$.

8.21 Lemma. *Das cap-Produkt hat folgende Eigenschaften:*

(1) $\partial(f \cap \sigma) = (-1)^{p+1}(\delta f)(\sigma) + (-1)^p f \cap (\partial\sigma)$.

(2) $\epsilon \cap \sigma = \sigma$. *Hierbei ist* $\epsilon \in C^0(X)$ *die Kokette, die jeden singulären Null-Simplex* $x \in X$ *auf* 1 *abbildet.*

(3) Falls $r = 0$ *dann* $E(f \cap \sigma) = f(\sigma)$

(4) $(f \cup g) \cap \sigma = f \cap (g \cup \sigma)$

(5) Das cap-Produkt ist natürlich: falls $u\colon X \to Y$ *dann gilt*

$$u_*((u^*f) \cap \sigma) = f \cap (u_*\sigma).$$

Hier ist $\sigma \in C_{p+r}(Y;R)$, $f \in C^p(X;R)$.

Proof. Wir wollen die Formel für die Differentiale beweisen. Dabei verwenden wir, dass die Alexander-Whitney Diagonalapproximation $\Delta\colon C_*(X) \to C_*(X) \otimes C_*(X)$ eine Kettenabbildung ist. Beachte zunächst, dass folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccc} C_q \otimes C_p & \xrightarrow{1\otimes f} & C_q \otimes R & \xrightarrow{\cdot} & C_q \\ \downarrow{\scriptstyle \partial\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle \partial\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ C_{q-1} \otimes C_p & \xrightarrow{1\otimes f} & C_{q-1} \otimes R & \xrightarrow{\cdot} & C_{q-1} \end{array}$$

Als nächstes wollen wir den Einfluss des Vorzeichenoperators E betrachten. Auf $C_q \otimes C_p$ gilt $(\partial \otimes 1) \circ E = (-1)^{pq}(\partial \otimes 1)$. Andererseits ist dort $E \circ (\partial \otimes 1) = (-1)^{(q-1)p}(\partial \otimes 1)$ (da $(\partial \otimes 1)(C_q \otimes C_p) \subset C_{q-1} \otimes C_p$). Insgesamt also $E \circ (\partial \otimes 1) = (-1)^p(\partial \otimes 1) \circ E$. Entsprechend $E \circ (1 \otimes \partial) = (-1)^q(1 \otimes \partial) \circ E$ (alles eingeschränkt auf $C_q \otimes C_p$).

Nun berechnen wir (wir benutzen das Symbol $\partial_\otimes = \partial \otimes 1 \pm 1 \otimes \partial$ für das Differential im Tensorprodukt $C_* \otimes C_*$)

$$\begin{aligned}
\partial(f \cap \sigma) &= \partial(1 \otimes f)E\Delta(\sigma)\\
&= (1 \otimes f)(\partial \otimes 1)E\Delta(\sigma) = (-1)^p(1 \otimes f)E(\partial \otimes 1)\Delta(\sigma)\\
&= (-1)^p(1 \otimes f)E(\partial_\otimes - (-1)^q(1 \otimes \partial))\Delta(\sigma)\\
&= (-1)^p(1 \otimes f)E\Delta(\partial\sigma) - (-1)^p(1 \otimes f)(1 \otimes \partial)E\Delta(\sigma)\\
&= (-1)^p f \cap (\partial\sigma) + (-1)^{p+1}(1 \otimes \delta f)E\Delta(\sigma)\\
&= (-1)^p f \cap (\partial\sigma) + (-1)^{p+1}(\delta f) \cap \sigma
\end{aligned}$$

Hier benutzen wir auch, dass nach Definition $\delta f = f \circ \partial$.

Exemplarisch zeigen wir jetzt noch, dass $\epsilon \cap \sigma = \sigma$. Per Definition ist $\epsilon \cap \sigma = (-1)^{0 \cdot q} f_q(\sigma)\epsilon(b_0(\sigma))$. Da $\sigma \in C_q$, gilt $f_q(\sigma) = \sigma$. Weiter ist $b_0(\sigma)$ ein singulärer Null-Simplex, also per Definition $\epsilon(b_0(\sigma)) = 0$. Die Formel folgt.

Entsprechend kann man die anderen Identitäten direkt nachrechnen. □

Aus dem Lemma ergibt sich direkt der folgende Satz.

8.22 Satz. *Das cap-Produkt induziert eine cap-Produkt Paarung*

$$\cap H^p(X) \times H_{p+q}(X) \to H_q(X).$$

Falls R ein kommutativer Ring mit 1, gilt entsprechendes auch mit Koeffizienten in R. Dieses cap-Produkt hat folgende Eigenschaften:

(1) $1 \cap a = a$

(2) $\alpha \cap (\beta \cap a) = (\alpha \cup \beta) \cap a$

(3) Es ist natürlich.

8.23 Definition. Sei X ein Raum. Die Augmentation $\epsilon\colon H_0(X; R) \to R$ ist induziert vom Kozykel $\epsilon\colon C_0(X) \otimes R \to R\colon \sigma^0 \otimes r \mapsto r$.

ϵ ist ein Isomorphismus, falls X wegzusammenhängend ist.

8.24 Definition. Das cap-Produkt und die Augmentation definieren zusammen die *Kronecker-Paarung*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle\colon H^p(X; R) \otimes H_p(X) \xrightarrow{\cap} H_0(X; R) \xrightarrow{\epsilon} R.$$

Dies kann man auch auffassen als Homomorphismus

$$H^p(X; R) \to \mathrm{Hom}(H_p(X), R)\colon \alpha \mapsto (a \mapsto \langle \alpha, a \rangle).$$

Entsprechendes geht auch für andere Kombinationen von Koeffizienten.

Es stellt sich wieder die Frage, wann dies ein Isomorphismus ist, und wenn nicht, was Kern und Kokern sind (der Kokern ist der Quotient des Zielraums durch das Bild, ist also ein Mass dafür, wieweit die Abbildung nicht surjektiv ist).

9 Universelle Koeffiziententheoreme

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, wie man Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten für einen Raum X zur Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ in Beziehung setzen kann. Tatsächlich kann man die allgemeineren Homologie- und Kohomologiegruppen vollständig aus der $\mathbb{Z}$-Homologie berechnen.

Beachte, dass die Kettenkomplexe für Kohomologie und allgemeine Koeffizienten auf rein algebraische Weise aus dem singulären Kettenkomplex gewonnen wurden. Wir werden daher auf rein algebraische Weise die gewünschte Beziehung herstellen können. Um das zu tun, benötigen wir einige Vorbereitung in homologischer Algebra. Dies werden wir etwas allgemeiner durchführen, als für unsere Zwecke nötig ist, da die benötigte Algebra auch an anderen Stellen oft auftaucht.

Zunächst eine Erinnerung:

9.1 Definition. Ein *Ring* R ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (Addition und Multiplikation), wobei R bezüglich $+$ eine abelsche Gruppe ist (mit neutralem Element 0). Die Multiplikation soll assoziativ sein und die Distributivgesetze erfüllen.

Falls die Multiplikation kommutativ ist, sprechen wir von einem *kommutativen Ring*. Falls $1 \in R$ existiert mit $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ für alle a, so heisst R ein *Ring mit* 1. Beispiele: $\mathbb{Z}$ und Körper. Wir werden im folgenden immer voraussetzen, dass jeder Ring eine 1 hat.

Ein *Links-Modul* über R ist eine abelsche Gruppe M mit einer Multiplikation $R \times M \to M$, die alle Vektorraumaxiome erfüllt, d.h. distributiv und assoziativ ist und (falls R eine 1 hat) mit $1 \cdot v = v$ für alle $v \in M$. Assoziativ heisst $(rs)v = r(sv)$ für $r, s \in R$, $v \in M$.

Bei eine *Rechts-R-Modul* hat man eine Multiplikation $M \times R \to R$ mit $v(rs) = (vr)s$. Beachte, dass dies für einen nicht-kommutativen Ring nicht dasselbe ist wie ein Linksmodul, wohl aber für kommutative Ringe.

Das Tensorprodukt über R eines Rechts-R-Moduls M mit einem Links-R-modul N ist eine abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ mit einer bilinearen Abbildung $\phi \colon M \times N \to M \otimes_R N$, welche $\phi(mr, n) = \phi(m, rn)$ erfüllt, und die folgende universelle Eigenschaft hat:

für jede bilineare Abbildung $f \colon M \times N \to X$, welche zusätzlich $f(mr, n) = f(m, rn)$ für alle $m \in M$, $r \in R$ und $n \in N$ erfüllt, existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $F \colon M \otimes_R N \to X$, so dass $f = F \circ \phi$.

Für zwei Links-R-Moduln M, N ist die Gruppe $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ definiert als die Gruppe aller R-Modulhomomorphismen, d.h. aller Homomorphismen, welche mit der R-Multiplikation verträglich sind. Entsprechend für R-Rechtsmoduln.

9.2 Bemerkung. Wir werden im folgenden einige Aussagen für allgemeine Ringe und Moduln machen. Wir werden alles aber in der Regel nur für $R = \mathbb{Z}$ oder für R einen Körper brauchen. Dann sind die Moduln genau die abelschen Gruppen (im Fall $R = \mathbb{Z}$), oder die R-Vektorräume.

9.3 Lemma. *Sei* $A \xrightarrow{f} B \to C \xrightarrow{p} 0$ *eine exakte Sequenz von R-Rechtsmoduln. Sei M ein R-Linksmodul. Dann ist die Sequenz*

$$A \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes_R M \xrightarrow{p \otimes 1} C \otimes_R M \to 0 \tag{9.4}$$

exakt. Sei N ein Rechts-R-Modul. Dann ist

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C,N) \to \mathrm{Hom}_R(B,N) \to \mathrm{Hom}_R(A,N) \tag{9.5}$$

exakt.

Proof. Der Modul $C \otimes_R M$ ist erzeugt von Elementen $c \otimes m$. Da p surjektiv ist, also auch $p \otimes 1$.

Weiter ist $(p \otimes 1) \circ (f \otimes 1) = (pf \otimes 1) = 0 \otimes 1) = 0$. Sei $K := \mathrm{im}(f \otimes 1)$. Wir haben die induzierte Abbildung $\overline{p \otimes 1}\colon B \otimes_R M/K \to C \otimes_R M$. Nach Homomorphiesatz ist $K = \ker(p \otimes 1)$ (was nur noch zu zeigen bleibt), genau wenn $\overline{p \otimes 1}$ ein Iso ist. Wir definieren eine Umkehrabbildung indem wir zunächst die bilineare Abbildung $C \times M \to B \otimes M/K$ durch $(p(b), m) \mapsto (b \otimes m) \cdot K$. Falls $p(b) = p(b')$ existiert wegen Exaktheit $a \in A$ mit $f(a) = b - b'$. Demzufolge ist $b \otimes m - b' \otimes m = f(a) \otimes m \in K$, und somit ist die Abbildung wohldefiniert. Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts liefert uns $C \otimes M \to B \otimes M/K$, und man sieht auf den reinen Tensoren (als Erzuegern), dass sie ionvers zu $\overline{p \otimes 1}$ ist.

Die Rechnungen für (9.5) sind ähnlich, nur leichter. □

Auch wenn $A \to B$ injektiv ist, kann man diese exakten Sequenzen nicht durch die fehlende Null ergänzen kann (auch für $R = \mathbb{Z}$). Dies zeigt das Beispiel $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$. Nach tensorieren mit $\mathbb{Z}/2$ ist der linke Pfeil $\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/2$ nicht länger injektiv (Multiplikation mit 2 ist die Nullabbildung). Genauso ist die rechts stehende Abbildung $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{2} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2)$ nicht surjektiv (es gilt $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$, und die Abbildung ist wieder die Nullabbildung).

Man beachte, dass wir uns die Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ als Kettenkomplex vorstellen könnnen, dessen Homologie (wegen Exaktheit) trivial ist. Nach Anwenden des Tensorprodukts bzw. Hom-Funktors ist die (Ko)homologie plötzlich nicht mehr Null. Dies ist der Prototyp eines solchen Phänomens, wenn wir die Beziehung zwischen Homologie vor und nach Tensorieren verstehen wollen (bzw. vor und nach Anwenden von Hom).

Die offensichtlich Frage ist: was (anstelle von Null) muss man ergänzen, damit die Sequenzen (9.4) und (9.5) wieder exakt werden. Hierzu benötigen wir einige weitere Vorbereitungen:

9.6 Definition. Ein Rechts-R-Modul P heisst *frei*, falls $P \cong \oplus_{i \in I} R$ für irgendeine (möglicherweise unendliche) Indexmenge I.

P heisst *projektiv*, falls für jeden Rechts-R-Modul Homomorphismus $\phi\colon P \to M$ und Surjektion $q\colon N \to M$ ein *Lift* $\Phi\colon P \to N$ existiert, d.h. $q \circ \Phi = \phi$.

Es wird nicht verlangt, dass Φ eindeutig ist (dies wird in der Regel auch nicht der Fall sein).

9.7 Lemma. *Jeder freie R-Modul ist projektiv.*

Proof. Sei $e_i = (\cdots, 0, 0, 1, 0, 0, \cdots) \in \oplus_{i \in I} R$ mit 1 an der Position i. Zu $\phi(e_i) \in M$ wähle ein Urbild $n_i \in N$ (mit $q(n_i) = \phi(e_i)$). Dies geht, da q surjektiv ist.

Dann definiere Φ durch $\Phi(e_i) := n_i$. Dies definiert (wie üblich) eindeutig einen Homomorphismus vom freien Modul nach N, der die gewünschte Eigenschaft hat. □

Diese Aussage stimmt im allgemeinen nicht, falls R keine 1 hat.

Der Begriff des projektiven Moduls ist gerade so gemacht, dass er die für uns entscheidende Eigenschaft von freien Moduln erhält.

9.8 Beispiel. Sei R ein Körper. Dann besitzt jeder Modul (als Vektorraum) eine Basis, ist also frei und insbesondere projektiv.

Falls $R = \mathbb{Z}$, ist ein Modul (eine abelsche Gruppe) genau dann projektiv, wenn es sich um eine freie abelsche Gruppe handelt. Insbesondere kann man z.B. die Identität $\mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n$ nicht liften zur Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n$.

9.9 Definition. Sei M ein Rechts-R-Modul. Eine *projektive Auflösung* von M ist eine exakte Sequenz von Rechts-R-Moduln

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

(nach Links möglicherweise unendlich fortgesetzt), so dass P_k projektiv ist für jedes $k \in \mathbb{N}$. Entsprechend definiert man *freie Auflösung*.

Wir werden nun die gesuchten Korrekturterme für die Sequenzen (9.4) und (9.5) definieren (und später zeigen, dass es sich wirklich um die gewünschten Korrekturterme handelt).

9.10 Definition. Sei M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul. Sei $\to P_1 \to P_0 \to M$ eine projektive Auflösung von M (beachte, dass es sich insbesondere um einen Kettenkomplex handelt). Tensoriere diesen Kettenkomplex über R mit N, und ersetze den Term $M \otimes_R N$ durch 0. Wir erhalten einen Kettenkomplex

$$\to P_2 \otimes_R M \to P_1 \otimes_R M \to P_0 \otimes_R M \to 0.$$

Definiere $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) := H_n(P_* \otimes_R N)$. Sei O ein weiterer Links-R-Modul. Mittels des Hom-Funktors erhalten wir einen weiteren Kettenkomplex

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0, O) \to \mathrm{Hom}_R(P_1, O) \to \dots$$

Definiere $\mathrm{Ext}_R^n(M, N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N))$.

Wir müssen natürlich noch zeigen, dass diese Definitionen nicht von der projektiven Auflösung abhängen (und das so eine wirklich existiert). Dies leistet der folgende Hauptsatz der homologischen Algebra.

9.11 Satz. *(1) Jeder R-Modul besitzt eine projektive Auflösung P_*.*

(2) Zwei projektive Auflösungen desselben R-Moduls sind homotopieäquivalent.

(3) Allgemeiner: sei N ein weiterer R-Modul. Sei P_* eine projektive Auflösung von M, Q_* eine projektive Auflösung von N. Zu jedem R-Modulhomomorphismus $f\colon M \to N$ existiert eine Kettenabbildung $f_*\colon P_* \to Q_*$ so dass $f_{-1} = f$. Zwei solche Kettenabbildungen f_* und g_* sind kettenhomotop.

Proof. Wir konstruieren P_* induktiv. Zunächst brauchen wir einen projektiven Modul P_0 mit einer Surjektion $P_0 \to M$. Wähle $P_0 := \oplus_{m \in M} R$, und die Abbildung sende das m entsprechende Basiselement im freien Modul P_0 auf m.

Induktiv sei bereits $P_k \to P_{k-1} \to \cdots \to P_0 \to M$ konstruiert, so dass die Sequenz überall ausser an P_k exakt ist. D.h. die Abbildung $P_k \to P_{k-1}$ ist nicht notwendig injektiv. Konstruiere (wie vorher) einen freien Modul P_{k+1}, der surjektiv auf den Kern abbildet.

Aussage (2) folgt aus Aussage (3): wende (3) an auf $\mathrm{id}\colon M \to M$, wobei auf der einen Seite die projektive Auflösung P_* und auf der anderen Seite Q_* benutzt wird. Wir erhalten Kettenabbildung $f_*\colon P_* \to Q_*$ und (die Rollen vertauschend) $g_*\colon Q_* \to P_*$. Dann ist $f_* \circ g_*\colon Q_* \to Q_*$ eine Kettenabbildung, deren (-1)-Term id_M ist. Natürlich hat $\mathrm{id}_*\colon Q_* \to Q_*$ die gleiche Eigenschaft. Wider nach (3) sind also $f_* \circ g_*$ und id_* kettenhomotop. Entsprechend für $g_* \circ f_*$, so dass g_* und f_* tatsächlich zueinander inverse Kettenhomotopieäquivalenzen sind.

Es bleibt noch, (3) zu zeigen. Seien $p_k\colon P_k \to P_{k-1}$ und $q_k\colon Q_k \to Q_{k-1}$ die Differentiale. Setze $P_{-1} := M$, $P_{-k} := 0$ für $k > 1$.

Wir werden per Induktion die Kettenhomotopie zwischen f_* und g_* konstruieren. Die Konstruktion von f_* selber geht analog. Zur Erinnerung: solch eine Kettenhomotopie ist eine Folge von Homomorphismen $h_k\colon P^k \to Q_{k+1}$, so dass $f_k - g_k = q_{k+1}h_k + h_{k-1}q_k$. Setze als Induktionsanfang $h_{-k} := 0$ für $k > 0$. Dann ist in negativen Graden alles o.K. Wenn h_j bereits für $j < k$ definiert ist, müssen wir also zu $\alpha = f_k - g_k - h_{k-1}q_k\colon P_k \to Q_k$ einen Lift $h_k\colon P_k \to Q_{k+1}$ konstruieren (bzgl. der Abbildung $q_{k+1}\colon Q_{k+1} \to Q_k$). Das ist genau die Eigenschaft von Projektivität, falls das Bild von α im Bild von q_{k+1} liegt. Da Q_* exakt ist, ist $\mathrm{im}(q_{k+1}) = \ker(q_k)$. Wir müssen also nur zeigen dass $q_k \circ \alpha = 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} q_k \circ \alpha &= (f_{k-1} - g_{k-1}) \circ p_k - q_k h_{k-1} p_k \\ &= h_{k-2} p_{k-1} p_k = 0. \end{aligned}$$

Der Lift h_k existiert wegen der Projektivität von P_k. □

Die Kettenhomotopieäquivalenzen induzieren Kettenhomotopieäquivalenzen auf den Kettenkomplexen, die man nach anwenden von $\otimes$ oder Hom erhält (wegen Funktorialität). Folglich sind Tor und Ext wohldefiniert. Wir sehen ausserdem, dass es sich bei Tor und Ext selbst um Funktoren handelt (jede Abbildung $f\colon A \to B$ induziert eine Abbildung zwischen den projektiven Auflösungen, diese ist eindeutig bis auf Homotopie, liefert also eine eindeutige Abbildung auf der Homologie (auch nach Anwendung von $\otimes$ oder Hom)).

9.12 Bemerkung. Wir haben im Beweis nicht benutzt, dass Q_k projektiv ist, sondern nur, dass Q_* exakt ist. Man kann die Aussage also entsprechend abschwächen.

9.13 Lemma. *Seien M, N R-Moduln. Dann gilt*

$$\mathrm{Tor}_0^R(M,N) = M \otimes_R N, \qquad \mathrm{Ext}_R^0(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N).$$

Proof. Die exakte Sequenz $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ einer projektiven Auflösung liefert nach Lemma 9.3 eine exakte Sequenz

$$P_1 \otimes_R N \to P_0 \otimes_R N \to M \otimes_R N \to 0$$

Wenn wir den rechten Term weglassen, bleibt als Null-te Homologie also gerade $M \otimes_R N$ übrig.

Entsprechend beweist man die zweite Identität. □

9.14 Lemma. *Sei P projektiv. Dann gibt es eine Auslösung $0 \to P \to P \to 0$. Folglich ist $\mathrm{Tor}_k^R(P,N) = 0 = \mathrm{Ext}_R^k(P,N)$ für $k > 0$.*

Dies gilt insbesondere für jeden Modul (also Vektorraum) über einem Körper, und für jede freie abelsche Gruppe (falls $R = \mathbb{Z}$).

9.15 Lemma. *Seien A, B abelsche Gruppen (also $\mathbb{Z}$-Moduln). Dann gilt*

(1) $\mathrm{Tor}_k(A,B) = 0 = \mathrm{Ext}^k(A,B)$ *für* $k > 1$.

(2) $\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/n, A) = \{a \in A \mid na = 0\}$

(3) $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, A) = A/nA$.

(4) Insbesondere $\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) = \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) = \mathbb{Z}/n \otimes \mathbb{Z}/m = \mathbb{Z}/d$, *wobei* $d = ggT(m,n)$.

Proof. Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei. Folglich hat A eine freie Auflösung $0 \to F_1 \to F_0 \to p \to A$, wobei $F_1 = \ker(p)$.

Für $\mathbb{Z}/n$ erhält man die Auflösung $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n \to 0$. Nach Tensorieren oder Anwenden des Hom-Funktors erhält man genau die behauptete Homologie. □

9.16 Satz. *Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ exakte Sequenz von R-Moduln, M weiterer R-Modul. Dann hat man lange exakte Sequenzen*

$$\to \mathrm{Tor}_2^R(C,M) \to \mathrm{Tor}_1^R(A,M) \to \mathrm{Tor}_1^R(B,M) \to \mathrm{Tor}_1^R(C,M) \to A \otimes M \to B \otimes M \to C \otimes M \to 0$$

$$\to \mathrm{Tor}_2^R(M,C) \to \mathrm{Tor}_1^R(M,A) \to \mathrm{Tor}_1^R(M,B) \to \mathrm{Tor}_1^R(M,C) \to M \otimes A \to M \otimes B \to M \otimes C \to 0$$

$$\leftarrow \mathrm{Ext}_2^R(C,M) \leftarrow \mathrm{Ext}_1^R(A,M) \leftarrow \mathrm{Ext}_1^R(B,M) \leftarrow \mathrm{Ext}_1^R(C,M) \leftarrow \mathrm{Hom}(A,M) \leftarrow \mathrm{Hom}(B,M) \leftarrow \mathrm{Hom}(C,M) \leftarrow 0$$

$$\to \mathrm{Ext}_2^R(M,C) \to \mathrm{Ext}_1^R(M,A) \to \mathrm{Ext}_1^R(M,B) \to \mathrm{Ext}_1^R(M,C) \to \mathrm{Hom}(M,A) \to \mathrm{Hom}(M,B) \to \mathrm{Hom}(M,C) \to 0$$

Proof. Konstruiere zunächst induktiv eine exakte Sequenz von freien Auflösungen $0 \to F_* \to G_* \to H_* \to 0$, mit $F_{-1} = A$, usw., und mit $G_k = F_k \oplus H_k$, ähnlich, wie wir vorher die freie Auflösung konstruiert hatten. Da $G_k = F_k \oplus H_k$, bleiben diese Sequenzen nach tensorieren mit M, sowie nach Anwenden des Hom-Funktors exakt. Wir erhalten also, wenn wir (Ko)homologie nehmen, die erste und die dritte lange exakte Sequenz unserer Liste. Ansosnten wähle eine freie Auflösung F_* von M. Da alle F_k frei sind, erhält man nach Tensorieren eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $0 \to F_* \otimes A \to F_* \otimes B \to F_* \otimes C \to 0$ (und entsprechend für Hom). Die zugehörigen langen exakten Sequenzen sind die fehlenden in unserer Liste. □

Wir wollen nun die entwickelten Werkzeuge benutzen, um Kohomologie und Homologie mit Koeffizienten R aus der Homologie mit Koeffizienten $\mathbb{Z}$ zu berechnen.

Dies tun wir zunächst ganz algebraisch:

9.17 Satz. ***Algebraische universelles Koeffiziententheorem.***
Sei G eine abelsche Gruppe und C_* ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen, und sei C_k eine freie abelsche Gruppe für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Es gibt (in C_* und G natürliche) exakte Sequenzen

$$0 \to H_n(C_*) \otimes G \to H_n(C_* \otimes G) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_*), G) \to 0.$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_*), G) \to H^n(\mathrm{Hom}(C_*, G)) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(H_n(C_*), G) \to 0.$$

All diese Sequenzen spalten, d.h. der mittlere Term ist isomorph zur direkten Summe der äusseren Terme. Diese Spaltung sind allerdings nicht natürlich.

Die Abbildung β ist gegeben durch die Kronecker Paarung: $\beta([f])([a]) = \beta(a)$. Hier repräsentiere $f \in \mathrm{Hom}(C_n, G)$ eine Kohomologieklasse, und $a \in C_n$ eine Homologieklasse.

Weiter gilt $\alpha([a] \otimes g) = [a \otimes g]$ mit $g \in G$ und $a \in C_n$ einem Repräsentanten der Homologieklasse $[a] \in H_n(C_*)$.

9.18 Bemerkung. Die Abbildung α ist ein Spezialfall des algebraischen Kreuzprodukts $H_k(C_*) \otimes H_l(D_*) \to H_{k+l}(C_* \otimes D_*)$. Wir müssen dazu G auffassen als Kettenkomplex D_* mit $D_0 = G$ und $D_k = 0$ für $k \neq 0$. Beachte, dass dann $H_0(D_*) = G$ und $H_k(D_*) = 0$ für $k \neq 0$. Wir werden den Satz bald auch auf solche Kreuzprodukte verallgemeinern.

Bevor wir den Satz beweisen, wollen wir die offensichtlichen Korollare für die Topologie ziehen.

9.19 Korollar. *Sei (X, A) ein paar von Räumen, G eine abelsche Gruppe. Dann erhält man für singuläre (Ko)homologie folgende natürlichen exakten Sequenzen:*

$$0 \to H_n(X, A) \otimes G \to H_n(X, A; G) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X, A), G) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X, A), G) \to H^n(X, A; G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X, A), G) \to 0.$$

All diese Sequenzen spalten, d.h. der mittlere Term ist isomorph zur direkten Summe der äusseren Terme. Diese Spaltung sind allerdings nicht natürlich.

Proof. Dies folgt aus Satz 9.17, da der singuläre Kettenkomplex frei ist, und aus der Definition von Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten. □

9.20 Beispiel. (1) Für jeden topologischen Raum X gilt

$$H^1(X; G) \cong \mathrm{Hom}(H_1(X), G),$$

da $H_0(X)$ immer frei abelsch ist.

(2) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so dass $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist. Dann folgt wegen Natürlichkeit und dem 5-er Lemma, dass

$$f_*\colon H_p(X;G) \to H_p(Y;G); \qquad f^*\colon H^p(Y;G) \to H^p(X;G)$$

für jedes G Isomorphismen sind.

Sei $\mathbb{R}P^2 = D^2/$, wobei gegenüberliegende Punkte auf dem Rand von D^2 identifiziert werden. Sei $f\colon \mathbb{R}P^2 \to D^2/S^1 \approx S^2$ dadurch gegeben, dass der Rand auf einen Punkt kollabiert wird. Z.B. das universelle Koeffiziententheorem liefert uns $H_k(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ für $k = 0, 1, 2$ (und 0 sonst), und $H_k(S^2; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ für $k = 0, 2$ (und 0 sonst). Für die zellulären Kettenkomplexe haben wir $C_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2 = C_2(S^2; \mathbb{Z}/2)$ (sie stimmen also mit der Homologie überein). f induziert hier die Identität (per Konstruktion ist die auf den zugehörigen Quotientensphären zu betrachtende Abbildung, deren Grad wir betrachten müssen, die Identität). Da hier offenbar $C_2 = H_2$, ist $H_2(f; \mathbb{Z}/2)$ die Identität. Aber es ist sowohl $H_1(f; \mathbb{Z}) = 0$ als auch $H_2(f; \mathbb{Z}) = 0$ (da $H_1(S^2) = 0$ und $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$). Es folgt, dass die Spaltung im universellen Koeffiziententheorem nicht natürlich sein kann.

Beweis von Satz 9.17:. Sei $B_p := \operatorname{im}(c_{p+q}) \subset C_p$ und $Z_p := \ker(c_p) \subset C_p$. (Zur Erinnerung: dass C_* ein Kettenkomplex ist, heisst $B_p \subset Z_p$, und man definiert $H_p(C_*) := Z_p/B_p$).

Zunächst betrachte folgende exakte Sequenz:

$$0 \to Z_p \to C_p \xrightarrow{c_p} B_{p-1} \to 0.$$

Wir wollen jetzt die Tatsache benutzen, dass C_* ein *freier* Kettenkomplex ist. Es gilt, dass jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe wieder frei abelsch ist, insbesondere also auch Z_p und B_{p-1}. Dies bedeutet, dass man einen Spalt $s\colon B_{p-1} \to C_p$ konstruieren kann, also so, dass $c_p \circ s = \mathrm{id}_{B_{p-1}}$ (man gibt einfach s auf Basiselementen vor, dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung). Dies liefert einen Isomorphismus $C_p \cong Z_p \oplus B_{p-1}$, man erhält also einen weiteren Spalt $t\colon C_p \to Z_p$. Beachte, dass eine spaltende kurze exakte Sequenz nach Anwenden des Hom- oder des Ext-Funktors in eine kurze exakte Sequenz übergeht (Tensorprodukt und Hom respektieren direkte Summen). Dies ist die einzige Stelle, wo die Voraussetzung eingeht, dass der Kettenkomplex aus freien abelschen Gruppen besteht.

Wie eben erwähnt, haben wir ausserdem die kurze exakte Sequenz $0 \to B_p \to Z_p \to H_p \to 0$, wobei H_p allerdings im allgemeinen nicht frei ist.

Betrachte nun folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B_p, C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C_{p+1}, G) & \mathrm{Ext}(H_{p-1}, G) \arrow[u] & \\
0 & \mathrm{Hom}(Z_p, G) \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(C_p, G) \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(B_{p-1}, G) \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \\
 & \mathrm{Hom}(H_p, G) \arrow[u] & \mathrm{Hom}(C_{p-1}, G) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(Z_{p-1}, G) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}
$$

Ausser der mittleren vertikalen (hiervon wollen wir ja gerade die Homologie berechnen) sind alle horizontalen und vertikalen Sequenzen exakt (beachte, dass ein paar Pfeile fehlen), die mittlere und untere horizontale wegen des Spaltes s, die anderen wegen Lemma 9.3 und Satz 9.16.

Diagrammjagd impliziert, dass die Ext-Sequenz existiert und exakt ist. Natürlichkeit folgt, da Hom und Ext natürlich sind.

Die gewünschte Spaltung wird induziert von

$$\mathrm{Hom}(t, 1)\colon\ \mathrm{Hom}(Z_p, G) \to \mathrm{Hom}(C_p, G)$$

(dies ist ein Spalt der mittleren horizontalen Sequenz), der Beweis ist wieder eine Diagrammjagd. Beachte, dass wir s willkürlich gewählt haben, hier ist also a priori die Natürlichkeit verletzt. Beispiele zeigen, dass man es auch nicht besser machen kann.

Für die Tor-Sequenz betrachte statt dessen das Diagram

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 & B_p \otimes G \arrow[l] \arrow[d] & C_{p+1} \otimes G \arrow[l] \arrow[d] & \mathrm{Tor}(H_{p-1}, G) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z_p \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & C_p \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & B_{p-1} \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & H_p \otimes G \arrow[d] & C_{p-1} \otimes G & Z_{p-1} \otimes G \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

Nach Rotieren um π geht dieses Diagramm in das vorher betrachtete über (nach Umbenennen). Insbesondere liefert die vorher durchgeführte Diagrammjagd genauso auch die exakte Sequenz mit Tor. $\square$

9.1 Künneth-Theorem

Dieser Abschnitt wurde in der Vorlesung nicht behandelt

Wie vorhin angedeutet, gibt es eine Verallgemeinerung der Tor-Sequenz auf Tensorprodukte von 2 Kettenkomplexen. Dies liefert das sogenannte *Künneth-Theorem.* Wir fangen wieder mit der algebraischen Version an.

9.21 Satz. ***Algebraisches Künneth-Theorem.***
Sei $R = \mathbb{Z}$, oder sei R ein Körper. Seien C_* und D_* freie Kettenkomplexe von R-Moduln (also freie abelsche Gruppen, oder Vektorräume). Dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \to \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H_p(C_*) \otimes H_{n-1}(D_*) \xrightarrow{\times} H_n(C_* \otimes D_*) \\ \to \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(C_*), H_{n-p-1}(D_*)) \to 0.$$

Diese Sequenz spaltet, allerdings nicht natürlich.

Proof. Der Beweis untersucht Diagramme, wie vorherigen Satzes. Er ist allerdings noch etwas komplizierter. □

9.22 Korollar. ***(Künneth-Theorem):***
Seien X und Y zwei topologische Räume. Sei R ein Körper, oder $R = \mathbb{Z}$. Dann erhält man natürliche kurze exakte Sequenzen

$$0 \to \bigoplus H_p(X;R) \otimes H_{n-p}(Y;R) \to H_n(X \times Y;R) \\ \to \bigoplus \mathrm{Tor}_1^R(H_p(X;R), H_{n-p-1}(Y;R)) \to 0.$$

Diese spalten, aber nicht auf natürliche Weise. Beachte, dass für einen Körper R $\mathrm{Tor}_1^R(V,W) = 0$, für beliebige V, W, da jeder Modul frei ist. In diesem Fall erhalten wir also einen Künneth-Isomorphismus.

9.23 Beispiel. Wir können nun sofort die Homologie von $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ nachrechnen, und erhalten unser altes Ergebnis (welches wir direkt dem zellulären Kettenkomplex abgelesen hatten).

Es gibt noch einige weitere universelle Koeffizienten Sequenzen, und Künneth Sequenzen, die verschiedenste Homologie- und Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in Beziehung setzen (man kann z.b. auch die Homologie aus der Kohomologie berechnen). Manche benötigen zusätzliche Voraussetzungen (z.B. das Künneth-Theorem für Kohomologie). Diese sind für endliche CW-Komplexe aber immer erfüllt.

10 Mannigfaltigkeiten und Orientierung

Wir haben jetzt schon einige Beispiele kompakter Mannigfaltigkeiten (ohne Rand) kennengelernt, und auch ihre Homologie berechnet. Beobachtung: meistens ist $H_{\dim(M)}(M) \cong \mathbb{Z}$, oder aber (wie bei $\mathbb{R}P^2$) $H_{\dim(M)}(M) = 0$, aber immer noch $H_{\dim(M)}(M;\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$.

Das ist kein Zufall, sondern bei Mannigfaltigkeiten immer so. Tatsächlich handelt es sich um eine der wichtigsten homologischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten, und wir werden dies in diesem Abschnitt genauer untersuchen. Die entscheidende Eigenschaft (die z.B. auch $\mathbb{R}P^2$ und S^2 unterscheidet) ist Orientierbarkeit. Dies kann man homologisch einführen (für beliebige topologische Mannigfaltigkeiten), für glatte Mannigfaltigkeiten aber auch mittels des Tangentialbündels. Wir werden uns hier auf den homologischen Zugang beschränken, da man damit dann auch die homologischen Eigenschaften herleiten kann.

10.1 Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension m. Ausschneidung impliziert dass für jedes $x \in M$ $H_m(M, M - \{x\}) \cong H_m(D^m, D^m - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$. Beachte aber, dass diese Isomorphismen nicht kanonisch sind.

Eine *homologische Orientierung* ist eine Wahl von Erzeugern $(\mu_x)_{x\in X}$ von $H_m(M, M - \{x\})$, welche in folgendem Sinne stetig ist:

für jedes $x \in M$ existiere eine offene Umgebung U von x und

$$\mu_U \in H_m(M, M - U),$$

so dass für alle $y \in U$ die Abbildung $(M, M - U) \to (M, M - \{y\})$ auf H_m μ_U auf μ_y abbildet.

10.2 Bemerkung. Dasselbe kann man auch machen für Homologie mit Koeffizienten in abelschen Gruppen. Interessant ist hier insbesondere $G = \mathbb{Z}/2$. Beachte, dass $H_m(M, M - \{0\}; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$, und es gibt nur einen Erzeuger für $\mathbb{Z}/2$. Man muss also oben keine Wahlen treffen, und Insbesondere folgt, dass jede Mannigfaltigkeit $\mathbb{Z}/2$-orientierbar ist.

10.3 Lemma. *$\mathbb{R}^m$ ist homologisch orientierbar.*

Proof. Wir müssen für jeden Punkt $v \in \mathbb{R}^m$ einen Standard-Erzeuger von $H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{v\})$ angeben. Wähle einen Erzeuger μ_0 von $H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{0\})$. Für jedes $v \in \mathbb{R}^m$ liefert Translation eine eindeutige Abbildung $t_v \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \colon x \mapsto x + v$, die 0 auf v abbildet. Definiere $\mu_v := (t_v)_*(\mu_0)$.

Wegen der Homogenität der Situation genügt es, Stetigkeit am Punkt 0 zu beweisen. Ausschneidung und Paarsequenz zeigt, dass die Abbildung $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - D^m) \to (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{0\})$ in Homologie einen Isomorphismus induziert. Sei μ_D das μ_0 entsprechende Element in $H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - D^m)$. Sei $v \in D^m$. Die beiden Abbildungen $i_v \colon (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - D^m) \to (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{v\})$ (Inklusion) und $t_v \circ i_0$ sind homotop. Folglich ist $(i_v)_*(\mu_D) = (t_v)_*(i_0)_*(\mu_D) = (t_v)_*(\mu_0) = \mu_D$. Genau dies muss man bei unserer Definition von Stetigkeit nachrechnen. □

10.1 Direkte Limiten

Wir sind direkten Limiten schon einmal begegnet (als wir singuläre Homologie untersucht haben). Jetzt wollen wir das formalisieren, da es im folgenden bequem (wenn auch nicht unbedingt notwendig) ist, diese zu benutzen. Wir werden uns etwas einschränken, und nur direkte Limiten über gerichtete Systeme betrachten.

10.4 Definition. Eine (Index)menge I ist ein *gerichtetes System*, falls auf I eine Teilordnung $<$ existiert (d.h. für $i, j \in I$ ist entweder $i < j$ oder $j < i$ oder keine Ordnungsrelation definiert, aber falls $i < j$ und $j < k$ dann auch $i < k$), so dass für je zwei Elemente $i, j \in I$ ein Element $k \in I$ existiert mit $i < k$ und $j < k$.

10.5 Beispiel. Wir werden vor allem zwei Beispiele benutzen:

(1) $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ mit der gewöhnlichen Anordnung.

(2) Für einen topologischen Raum X und eine Teilmenge $A \subset X$ die Menge I aller offenen Umgebungen von A. Die Ordnungsrelation ist enthalten-Sein: $U < V$ falls $V \subset U$. Dies ist ein gerichtetes System, da für offene Umgebungen U, V von A stets $U \cap V$ offene Umgebung von A ist mit $U \cap V \subset U$ und $U \cap V \subset V$.

10.6 Definition. Sei I ein gerichtetes System und $(A_i)_{i \in I}$ eine Kollektion von abelschen Gruppen. Falls $i < j$, sei ein Homomorphismus $\phi_{ji} \colon A_i \to A_j$ gegeben, mit $\phi_{kj} \circ \phi_{ji} = \phi_{ki}$ falls $i < j < k$.

Der *direkte Limes* des Systems $(A_i)_{i \in I}$ (zu dem stillschweigend auch die Homomorphismen ϕ_{ij} gehören) ist eine Gruppe $A = \lim_I A_i$ mit Homomorphismen $\phi_i \colon A_i \to A$ so dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Wann immer eine Gruppe X und Homomorphismen $\beta_i \colon A_i \to X$ vorgegeben sind, so dass $\beta_j \phi_{ji} = \beta_i$ falls $i < j$, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\beta \colon A \to X$ mit $\beta \phi_i = \beta_i$ für alle $i \in I$.

10.7 Lemma. *Der direkte Limes existiert und ist eindeutig bis aus Isomorphie. A kann definiert werden als $(\bigoplus_{i \in I} A_i)/K$, wobei die Untergruppe K erzeugt wird von Elementen $\phi_{ji}(x) - x$ für alle $x \in A_i$ und für alle $i, j \in I$ (hier identifizieren wir A_i mit seinem Bild in $\bigoplus_{i \in I} A_i$).*

Die vielleicht entscheidende Eigenschaft, (die wir auch schon gesehen haben) ist:

(1) Falls $a \in A$, dann gibt es $i \in I$ und $a_i \in A_i$ mit $\phi_i(a_i) = a$, d.h. jedes Element aus A kommt von einem der A_i.

(2) Falls $a_i \in A_i$ und $a_j \in A_j$ mit $\phi_i(a_i) = \phi_j(a_j)$, dann existiert $k \in I$ mit $k > i$ und $k > j$, so dass $\phi_{ki}(a_i) = \phi_{kj}(a_j)$. Also je zwei Elemente, im im "Unendlichen" gleich werden, stimmen schon nach endlich vielen Schritten überein.

10.8 Lemma. ***Direkter Limes ist ein exakter Funktor.***
Sei I ein gerichtetes System, und A_i, B_i und C_i Systeme von abelschen Gruppen indiziert durch I. Seien $\alpha_i \colon A_i \to B_i$ und $\beta_i \colon B_i \to C_i$ Homomorphismen gerichteter Systeme (d.h. die offensichtlichen Diagramme kommutieren). Für jedes $i \in I$ sei

$$0 \to A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i \xrightarrow{\beta_i} C_i \to 0$$

exakt. Dann ist auch die zugehörige Sequenz der direkten Limiten

$$0 \to \lim_I A_i \to \lim_I B_i \to \lim_I C_i \to 0$$

exakt. Entsprechendes gilt für lange exakte Sequenzen.

10.2 Cech Kohomologie

10.9 Definition. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Definiere

$$\check{H}^q(A) := \lim_{A \subset U} H^q(U),$$

wobei der direkte Limes über alle offenen Umgebungen von U gebildet wird.

Wir werden dies insbesondere für kompakte Teilmengen K von Mannigfaltigkeiten M verwenden. In diesem Fall kann man zeigen, dass $\check{H}^q(K)$ nur von K abhängt (und nicht von M), und dass in vielen Fällen (z.B. wenn K selbst eine Mannigfaltigkeit oder ein CW-Komplex ist) $\check{H}^q(K) = H^q(K)$. Wir werden das nicht brauchen. Wir beobachten nur:

10.10 Beispiel. Falls $A \subset X$ offen, insbesondere falls $A = X$, gilt $\check{H}^q(A) = H^q(A)$.
$\check{H}^q$ ist ein kontravarianter Funktor für Einbettungen.

10.11 Lemma. *Sei X eine Mannigfaltigkeit, $K_1, K_2 \subset X$ kompakt. Dann erhält man eine lange exakte Mayer-Vietoris Sequenz*

$$\to \check{H}^{n-1}(K_1 \cap K_2) \to \check{H}^n(K_1 \cup K_2) \to \check{H}^n(K_1) \oplus \check{H}^n(K_2) \to .$$

Seien $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ und $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Dann gilt

$$\check{H}^q(A) = \lim_{\mathbb{N}} \check{H}^q(A_k) \tag{10.12}$$

Proof. Die exakte Mayer Vietoris Sequenz haben wir für Zerlegungen in offene Teilmengen immer, also insbesondere für offene Umgebungen von K_1 und K_2. Jede offene Umgebung von $K_1 \cap K_2$ ist Schnitt einer offenen Umgebung von K_1 und von K_2. Wegen Lemma 10.8 erhält man auch für die direkten Limiten, also $\check{H}^*$, eine exakte Sequenz.

Für (10.12) stellt man fest, dass man insgesamt auf beiden Seiten den Limes über die gleiche gerichtete Indexmenge nimmt. □

Diese beiden Eigenschaften sind die entscheidenden, weswegen wir mit $\check{H}$ anstelle von singulärer Kohomologie arbeiten wollen. Beachte, dass in singulärer Homologie die Mayer-Vietoris Sequenz nicht für beliebige kompakte Mengen exakt ist.

10.13 Lemma. *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $K \subset M$ kompakt. Sei $\mu \in H_m(M, M - K)$. Es gibt eine $\cap$-Produkt Paarung*

$$\cap\mu \colon \check{H}^q(K) \to H_{m-q}(M, M - K).$$

Proof. Zunächst muss man überprüfen, dass für eine offene Umgebung U von K und für $\mu \in H_m(U, U - K)$ die Formel für das cap-Produkt eine Paarung

$$\cap\mu \colon H^q(U) \to H_{m-q}(U, U - K)$$

liefert. Per Ausschneidung (funktioniert da K abgeschlossen) gilt aber $H_*(U, U - K) \cong H_*(M, M - K)$, und entsprechend in singulärer Kohomologie. Übergang zum direkten Limes liefert die Behauptung. □

10.14 Satz. *Sei M eine kompakte orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand. Sei $K \subset M$ kompakt. Dann gilt:*

(1) $H_k(M, M - K) = 0$ *für* $k > m$.

(2) Es gibt genau ein $\mu_K \in H_m(M, M-K)$ *mit* $(i_x)_*\mu_K = \mu_x$ *für jedes* $x \in K$. *Cap-Produkt mit* μ_K *liefert einen Isomorphismen*

$$\cap \mu_K : \check{H}^q(K) \to H_{m-q}(M, M - K).$$

Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir folgendes allgemeine Resultat:

10.15 Lemma. ***Bootstrap-Lemma.***
Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $P(K)$ eine Aussage über kompakte Teilmengen $K \subset M$. Falls folgende drei Aussagen gelten, gilt $P(K)$ für jede kompakte Teilmenge von M:

(K) Falls $K \subset U \subset M$, U offene Teilmenge von M mit $\phi\colon U \to \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus und $\phi(K)$ konvex, so gilt $P(K)$ (also: P gilt für konvexe Teilmenge von euklidischen offenen Teilmengen von M).

(M) Falls $P(K)$, $P(L)$ und $P(K \cap L)$ gelten, dann auch $P(K \cup L)$.

(L) Falls $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ und $P(K_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann auch für $P(\bigcap K_k)$.

Proof. Unter den gegebenen Voraussetzungen müssen wir $P(K)$ beweisen für jede kompakte Teilmenge K von M.

1. Schritt: Falls $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$, und $K_i \subset U$ sind konvexe Teilmengen einer festen euklidischen Teilmenge U, so kann man induktiv (K) und (M) anwenden, um $P(K)$ zu beweisen (beachte, dass $(K_1 \cup \cdots \cup K_l) \cap K_{l+1} = (K_1 \cap K_{l+1}) \cup \cdots (K_l \cap K_{l+1})$, und der Schnitt zweier konvexer Mengen ist konvex, so dass die Induktionsvoraussetzung hierauf anwendbar ist).

2. Schritt: Sei K kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Wähle, für jedes $\epsilon > 0$, eine endliche Überdeckung von K durch Bälle (also konvexe Mengen) von Radius ϵ mit Zentrum in K. Sei U_ϵ deren Vereinigung. Dann gilt $K = \bigcap U_\epsilon$ (da das Komplement von K offen ist, hat jeder Punkt ausserhalb von K positiven Abstand von K und kann daher für kleine ϵ nicht in U_ϵ enthalten sein). Mit (L) folgt also $P(K)$, falls $K \subset U$ und U eine euklidische Umgebung in M.

3. Schritt: Wähle nun eine endliche Überdeckung von M durch euklidische Bälle $B_i \subset U_i$ $i = 1, \dots, N$. Für beliebiges kompaktes K setze $K_k := K \cap B_i$. Dann gilt $K = K_1 \cup \cdots K_N$. Nach dem 2. Schritt gilt $P(K_i)$, und $P(K_{i_1} \cap \dots K_{i_k})$. Wegen (M) gilt daher auch $P(K)$. □

Zum Beweis von Satz 10.14 müssen wir also nur noch die Bedingungen (K), (M) und (L) des Bootstrap-Lemmas in unserem Fall beweisen. Wir werden das Symbol i für verschiedene Einbettungen von (Paaren von) Untermengen benutzen.

Für (K) beachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
H_k(D^m, S^{m-1}) & \xrightarrow{\cong} & H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \phi(K)) & \xrightarrow{\cong} & H_k(M, M - K) \\
\downarrow{=} & & \downarrow & & \downarrow \\
H_k(D^m, S^{m-1}) & \xrightarrow{\cong} & H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \phi(x)) & \xrightarrow{\cong} & H_k(M, M - \{x\}).
\end{array}$$

Hier sind die linken horizontalen Pfeile Isomorphismen wegen Homotopieinvarianz (hier benutzen wir Konvexität), die rechten wegen Ausschneidung. Aussage (1) folgt sofort.

Für (2) betrachte zunächst den Fall $K = \{x\}$. Wir finden beliebig kleine zusammenziehbare Umgebungen U von x. Es folgt $\check{H}^p(\{x\}) \cong H^p(U) = 0$ für $p \neq 0$. Für $p = 0$, $\cap\mu_x\colon H^0(U) \to H_m(U, U - \{x\}) \cong H_m(M, M - \{x\})$ bildet 1 ab auf $1 \cap \mu_x = \mu_x$ (wir identifizieren die Elemente in verschiedenen kanonisch isomorphen Gruppen), bildet also Erzeuger von zyklischen Gruppen ab auf Erzeuger und ist somit ein Isomorphismus.

Für konvexes K wähle $x \in K$. (2) folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \check{H}^p(\{x\}) \arrow[r, "\cap\mu_x"] & H_{m-p}(M, M - \{x\}) \\ \check{H}^p(K) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, "\cap\mu_K"] & H_{m-p}(M, M - K) \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Hier ist μ_K das Bild von μ_x unter dem inversen des Iso $H_m(M, M - K) \to H_m(M, M - \{x\})$ (daraus folgt, dass das Diagramm kommutiert). Orientierbarkeit von $\mathbb{R}^m$ (also Lemma 10.3) (und Ausschneidung) impliziert, dass μ_K nicht von x abhängt. Eine konvexe Menge hat beliebig kleine zusammenziehbare offene Umgebungen, daher ist die linke horizontale Abbildung ein Isomorphismus.

Für (M) betrachte folgende exakte relative Mayer-Vietoris Sequenz:

$$\to H_{k+1}(M, M - (K \cap L)) \to H_k(M, M - (K \cup L)) \to$$
$$H_k(M, M - K) \oplus H_k(M, M - L) \to H_k(M, M - (K \cap L)) \to$$

Es folgt sofort, dass $H_k(M, M - (K \cup L)) = 0$ für $k > m$.

Für $k = m$ beachte, dass Eindeutigkeit von μ_K impliziert, dass $i_*(\mu_K) = \mu_{K\cap L} = i_*(\mu_L)$. Insbesondere wird in der Mayer-Vietoris Sequenz das Tupel (μ_K, μ_L) auf $i_*\mu_K - i_*\mu_L = 0$ abgebildet. Also gibt es ein Urbild $\mu_{K\cup L}$ (Urbild heisst: mit $(i_K)_*\mu_{K\cup L} = \mu_K$ und $(i_L)_*\mu_{K\cup L} = \mu_L$), welches wegen der Exaktheit der Mayer-Vietoris Sequenz, und da $H_{m+1}(M, M - (K \cap L)) = 0$, eindeutig ist. Natürlichkeit impliziert $(i_x)_*\mu_{K\cup L} = \mu_x$ für jedes $x \in K \cup L$.

Natürlichkeit des cap-Produkts (überträgt sich auf Cech-Kohomologie), die lange exakte Mayer-Vietoris Sequenz für Cech-Kohomologie (Lemma 10.11) und das 5-er Lemma implizieren, dass $\cap\mu_{K\cup L}\colon \check{H}^p(K \cup L) \to H_{m-p}(M, M - (K \cup L))$ ein Isomorphismus ist.

Für (L) überprüfe, dass aus der langen exakten Paarsequenz und Natürlichkeit des cap-Produkts folgt, dass man für (L) nur zeigen muss, dass singuläre Homologie und Cech-Kohomologie mit direkten Limiten (hier $K = \bigcap K_i$ und $\bigcup_{M-K_k} = M - (\bigcap K_i)$) verträglich ist. Dies haben wir in Lemma 10.11 und Satz 5.65 bewiesen.

10.16 Korollar. *Falls M eine kompakte orientierte zusammenhängende m-Mannigfaltigkeit, dann gibt es genau ein $[M] \in H_m(M)$ so dass für jedes $x \in M$ gilt: $(i_x)_*[M] = \mu_x \in H_m(M, M - \{x\})$. Man nennt $[M]$ die* Fundamentalklasse *von M. Es gilt $H_m(M) \cong \mathbb{Z}$, und $[M]$ ist ein Erzeuger von M.*

Ausserdem hat man Poincaré-Dualität $\cap[M]\colon H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{m-k}(M)$¿

Proof. Setze $[M] := \mu_\emptyset$. Beachte, dass $\check{H}^0(M) = H^0(M) = \mathbb{Z}$, und der Erzeuger $1 \in H^0(M)$ wird abgebildet und $\cap[M]$ auf $[M]$. Da dieser Homomorphismus ein Isomorphismus ist, ist $[M]$ ein Erzeuger von $H_m(M)$. ∎

10.17 Korollar. *Sei M eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand. Falls* $\dim(M)$ *ungerade, gilt für die Euler Charakteristik* $\chi(M) = 0$.

Proof. Es gilt $\chi(M) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^m \dim H_k(M;\mathbb{Q})$.

Wir beweisen gleich, dass $\dim_{\mathbb{Q}} H_k(M;\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} H_{m-k}(M;\mathbb{Q})$.

Das universelle Koeffiziententheorem impliziert $H_k(M,\mathbb{Q}) = H_k(M) \otimes \mathbb{Q} \oplus \operatorname{Tor}_1(H_{k-1}(M),\mathbb{Q})$.

Beachte, dass $H_{k-1}(M)$ eine endlich erzeugte freie Gruppe ist, folglich isomorph zu $\mathbb{Z}_0^n \oplus \mathbb{Z}/n_1 \oplus \mathbb{Z}/n_l$. Die Definition impliziert dass Tor und Ext mit direkter Summe vertauscht. Lemma 9.15 impliziert $\operatorname{Tor}_1(\mathbb{Z},\mathbb{Q}) = 0$, und $\operatorname{Tor}_1(\mathbb{Z}/n,\mathbb{Q}) = 0$, genauso $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z},\mathbb{Q}) = 0 = \operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}/n,\mathbb{Q})$. Also $\operatorname{Tor}_1(H_{k-1}(M);\mathbb{Q}) = 0 = \operatorname{Ext}^1(H_{k-1}(M),\mathbb{Q})$.

Wir erhalten also $H_k(M;\mathbb{Q}) = H_k(M) \otimes \mathbb{Q}$, $H^k(M;\mathbb{Q}) = \operatorname{Hom}(H_k(M),\mathbb{Q})$. Falls nun, wobei wirdie Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen verwenden,

$$H_k(M) \cong \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}/n_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_r,$$

gilt folglich

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_k(M;\mathbb{Q}) = l. \tag{10.18}$$

Für $H^k(M)$ liefert das universelle Koeffiziententheorem

$$H^k(M) \cong \operatorname{Hom}(H_k(M),\mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}^1(H_{k-1}(M),\mathbb{Z}).$$

Mit unserer Zerlegung von $H_k(M)$ folgt $\operatorname{Hom}(H_k(M),\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^l$. Ausserdem sind wegen Lemma 9.15 die vorkommenden Ext-Gruppen alle endliche Gruppen (enthalten also keine freien Summanden), also auch $H^k(M) \cong \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_s$ (mit dem gleichen l).

Wegen Poincaré-Dualität gilt aber $H_k(M) \cong H^{m-k}(M)$. Folglich, wegen Gleichung (10.18), $\dim_{\mathbb{Q}} H_{m-k}(M;\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} H_k(M;\mathbb{Q})$. □

10.19 Bemerkung. Dieser Satz verallgemeinert sich auf nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten. Man muss nur $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{Z}/2$ ersetzen. Wir haben gesehen, dass auch für den Körper $\mathbb{Z}/2$ und beliebige endliche CW-Komplexe X (wobei $|I_k|$ die Anzahl der k-Zellen ist)

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k |I_k| = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k \dim_{\mathbb{Z}/2} H_k(X;\mathbb{Z}/2).$$

Da jede Mannigfaltigkeit $k\mathbb{Z}/2$-orientierbar ist, und sich Poincaré-Dualität (mit unverändertem Beweis) auf alle anderen Koeffizienten, insbesondere $\mathbb{Z}/2$, verallgemeinern lässt, überträgt sich auch der obige Beweis, es gilt also $H_k(M;\mathbb{Z}/2) \cong H^{m-k}(M;\mathbb{Z}/2)$. Das universelle Koeffiziententheorem impliziert aber hier

$$H^{m-k}(M;\mathbb{Z}) \cong H_{m-k}(M;\mathbb{Z}).$$

10.20 Satz. *Sei M eine zusammenhängende m-Mannigfaltigkeit, und entweder M nicht kompakt, oder M nicht orientierbar. Dann gilt* $H_m(M) = 0$.

Proof. Man kann den Beweis von Satz 10.14 auf nicht notwendigerweise orientierbare und auf nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten verallgemeinern, wobei man einen Isomorphismus von $H_m(M)$ zu einer Verallgemeinerung von $\check{H}^0(M)$ erhält, die unter den Voraussetzungen dieses Satzes Null ist. □