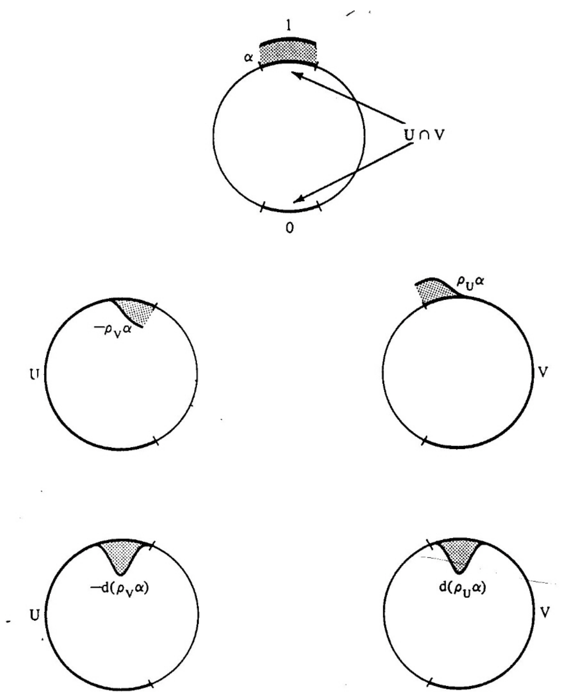
Die de Rham-Kohomologie - Differentialformen, de Rham-Komplex & Mayer-Vietoris-Sequenz.

Sebastian Hage*

19.04.2004



Vortrag im Rahmen des Seminars

"De Rham-Kohomologie und harmonische Differentialformen"

von Prof. Schick

SS 2004

*email: sebhage@math.uni-goettingen.de

Contents

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Als Vorbereitung der auf Mannigfaltigkeiten definierten Differentialformen soll zunächst der Begriff der *differenzierbaren Mannigfaltigkeit* wiederholt werden. Mit Differenzierbarkeit ist hier stets die $\mathcal{C}^\infty$-Eigenschaft, d.h. die Glattheit, gemeint. Die Darstellung lehnt sich an [7].

Definition 1.1. Eine *(abstrakte) glatte Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum M mit den Eigenschaften

1. M ist hausdorffsch: für zwei Punkte $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gibt es offene Umgebungen $U_x \ni x, U_y \ni y$ mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.
2. Es existiert eine abzählbare Teilmenge $A \subset M$ mit $\bar{A} = M$.

zusammen mit einer offenen Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von M und einer Familie $\{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Homöomorphismen $\Phi_\lambda : U_\lambda \overset{\cong}{\to} V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ (*Karten* von M), so daß für alle λ, μ die Komposition

$$\Phi_\lambda \circ \Phi_\mu^{-1} : V_\mu \cap \Phi_\lambda(U_\lambda) \longrightarrow V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$$

eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist.

Nun erinnere an den Begriff der eingebetteten differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Definition 1.2. Eine *eingebettete glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n* ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}^N$ mit den Eigenschaften:
Für jedes $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $x \in \overline{U}_x \subset \mathbb{R}^N$, eine offene Teilmenge $\overline{V}_x \subset \mathbb{R}^N$ und ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus

$$\overline{\Phi}_x : \overline{U}_x \longrightarrow \overline{V}_x,$$

so daß mit den Definitionen $U_x := \overline{U}_x \cap M$ und $V_x := \Phi(U_x)$ die Menge V_x offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$ ist.

Die Abbildungen

$$\Phi_x := \overline{\Phi}_x|_{U_x} : U_x \longrightarrow V_x \subset \mathbb{R}^N$$

heißen die *Karten* oder *lokalen Koordinaten* von M. Dabei wird U_x als *Kartengebiet* bezeichnet.

Definition 1.3. Seien $\Phi_1 : U_1 \to V_1$ und $\Phi_2 : U_2 \to V_2$ Karten von M mit den entsprechenden $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismen $\overline{\Phi_1}, \overline{\Phi_2}$. Dann heißen die eingeschränkten Abbildungen

$$\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} : \Phi_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\Phi_1^{-1}} U_1 \cap U_2 \xrightarrow{\Phi_2} \Phi_2(U_1 \cap U_2)$$

und entsprechend

$$\overline{\Phi_2} \circ \overline{\Phi_1}^{-1} : \overline{\Phi_1}(\overline{U_1} \cap \overline{U_2}) \longrightarrow \overline{\Phi_2}(\overline{U_1} \cap \overline{U_2})$$

Kartenwechsel oder *Koordinatenwechsel*.

2 Differentialformen

Als Vorarbeit zur Betrachtung von Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit M werden zunächst einige Aspekte der multilinearen Algebra beleuchtet: hierzu zählen die alternierenden k-Linearformen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen sowie das sogenannte Dachprodukt $\wedge$ zwischen ihnen, welches die Menge dieser Formen auf einem Vektorraum zur einer Algebra macht. Desweiteren erlaubt das Dachprodukt eine explizite Angabe einer Basis, mit deren Hilfe für eine beliebige alternierende Linearform eine eindeutige Darstellung bezüglich dieser Basis angegeben werden kann. Im Anschluß erfolgt die Einführung des Begriffs der Differentialform, auf den sich die zuvor erkannten Eigenschaften ohne weiteres übertragen.

2.1 Alternierende k-Formen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum

Definition 2.1. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine ***alternierende k-Form*** auf V ist eine Abbildung

$$\omega : V^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. ω ist *k-linear*, d.h. linear in jedem Argument.
2. ω ist *alternierend*, d.h. für $1 \leq i < j \leq k$ ist
$$\omega(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\omega(v_1, ..., v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, ..., v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, ..., v_k).$$

Bezeichne $\mathrm{Alt}^k(V)$ die Menge der alternierenden k-Formen auf V. Dann wird $\mathrm{Alt}^k(V)$ durch punktweise Addition und Skalarmultiplikation selbst zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dimension

$$\dim(\mathrm{Alt}^k(V)) = \begin{cases} \binom{n}{k}, & n \geq k \\ 1, & n = k \\ 0, & n < k. \end{cases}$$

Die alternierenden 1-Formen auf V sind gerade die Linearformen $\omega : V \to \mathbb{R}$, also ist $\mathrm{Alt}^1(V)$ gleich dem Dualraum von V:

$$\mathrm{Alt}^1(V) = V^*.$$

Für $k = 0$ definiert man $\mathrm{Alt}^0(V) := \mathbb{R}$.

2.2 Das Dachprodukt $\wedge$ alternierender k-Formen

Man führt nun durch das sogenannte Dachprodukt $\wedge$ von alternierenden k-Formen eine Multiplikation auf den Vektorräumen $\mathrm{Alt}^k(V)$ ein.

Definition 2.2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$ und $\eta \in \mathrm{Alt}^q(V)$. Dann heißt die durch

$$\omega \wedge \eta(v_1, ..., v_{k+q}) := \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in S_{k+q}} sgn(\sigma) \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) \cdot \eta(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(k+q)})$$

definierte alternierende $(k+q)$-Form $\omega \wedge \eta \in \mathrm{Alt}^{k+q}(V)$ das ***äußere Produkt*** oder ***Dachprodukt*** von ω und η.

Einige Spezialfälle des Dachproduktes zeigt folgendes

Beispiel 2.3.

1. Für $\omega = c \in \mathrm{Alt}^0(V) = \mathbb{R}$ ist $\omega \wedge \eta = c\eta$.
2. Für $\omega, \eta \in \mathrm{Alt}^1(V) = V^*$ ist $\omega \wedge \eta$ gegeben durch $(\omega \wedge \eta)(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1)$.
3. Für $\omega \in \mathrm{Alt}^r(V)$ und $\eta \in \mathrm{Alt}^1(V)$ gilt

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, ..., v_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i} \omega(v_1, ..., \widehat{v_i}, ..., v_{r+1}) \cdot \eta(v_i),$$

wobei $(v_1, ..., \widehat{v_i}, ..., v_{r+1}) \in V^r$ das r-Tupel bezeichnet, das durch Streichen des i-ten Elementes v_i aus dem $(r+1)$-Tupel $(v_1, ..., v_{r+1}) \in V^{r+1}$ entsteht.

Im folgenden werden die Eigenschaften des Dachproduktes aufgedeckt; insbesondere zeigt sich, daß es die direkte Summe von Vektorräumen $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Alt}^k(V)$ zu einer Algebra macht:

Lemma 2.4. *Für jeden reellen Vektorraum V wird die direkte Summe*

$$\mathrm{Alt}^*(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Alt}^k(V)$$

durch das Dachprodukt zu einer graduierten antikommutativen Algebra mit Einselement*, d.h. für alle $r, s, t \geq 0$ gilt:*

1. *Das Dachprodukt* $\wedge : \mathrm{Alt}^r(V) \times \mathrm{Alt}^s(V) \to \mathrm{Alt}^{r+s}(V)$ *ist* bilinear.

2. *Das Dachprodukt* $\wedge$ *ist* assoziativ, *i.e. es gilt* $(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$ *für* $\omega \in \mathrm{Alt}^r(V), \eta \in \mathrm{Alt}^s(V), \zeta \in \mathrm{Alt}^t(V)$.

3. *Das Dachprodukt* $\wedge$ *ist* antikommutativ, *i.e. es gilt* $\eta \wedge \omega = (-1)^{r \cdot s} \omega \wedge \eta$ *für* $\omega \in \mathrm{Alt}^r(V)$, $\eta \in \mathrm{Alt}^s(V)$.

4. *Die* 0*-Form* $1 \in \mathrm{Alt}^0(V) = \mathbb{R}$ *erfüllt* $1 \wedge \omega = \omega$ *für alle* $\omega \in \mathrm{Alt}^r(V)$.

Beweis. Die aufgezählten Eigenschaften - insbesondere (1),(3) und (4) - folgen auf einfache Weise aus der Definition und werden hier nicht ausformuliert. □

2.3 Die Räume Alt$^k(V)$ und ihre Basis

Bisher wurde lediglich von den Räumen $\mathrm{Alt}^k(V)$ als endlich-dimensionalen Vektorräumen gesprochen, und das Dachprodukt wurde ohne Verwendung einer Basis definiert (deshalb wird die Darstellung von $\wedge$ als *basisfrei* bezeichnet). Nun soll eine Basis angegeben werden, mit deren Hilfe jede alternierende k-Form eine eindeutige Darstellung bezüglich dieser erhält.

Sei dazu $e_1, ..., e_n$ eine Basis des n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Dann ist die dazu duale Basis $\delta^1, ..., \delta^n \in \mathrm{Alt}^1(V) = V^*$ gegeben durch die mit $\delta^i(e_j) = \delta_{ij}$ eindeutig bestimmten Linearformen auf V. Es ergibt sich der nachstehende

Satz 2.5. *Die alternierenden* k*-Formen* $\delta^{i_1} \wedge ... \wedge \delta^{i_k}$ *mit* $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ *bilden eine Basis von* $\mathrm{Alt}^k(V)$, *und jede alternierende* k*-Form* $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$ *besitzt eine eindeutige Darstellung*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1 ... i_k} \delta^{i_1} \wedge ... \wedge \delta^{i_k}, \quad a_{i_1 ... i_k} \in \mathbb{R},$$

wobei $a_{i_1 ... i_k} = \omega(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$ *ist.*

Beweis. Betrachte die alternierenden k-Formen $\delta^{i_1} \wedge ... \wedge \delta^{i_k}$.
Sei $\omega := \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1 ... i_k} \delta^{i_1} \wedge ... \wedge \delta^{i_k}$. Aus $\omega = 0$ folgt dann für alle geordneten - d.h. $1 < i_1 < ... i_k < n$ - k-Tupel $(i_1, ..., i_k)$, daß

$$a_{i_1 ... i_k} = \omega(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) = 0$$

ist. Also sind die k-Formen $\delta^{i_1} \wedge ... \wedge \delta^{i_k}$ linear unabhängig.
Sei nun $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$. Dann besitzt ω die Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1 ... i_k} \delta^{i_1} \wedge ... \wedge \delta^{i_k},$$

denn wegen

$$(\delta^{i_1} \wedge ... \wedge \delta^{i_k})(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) = 1$$

gilt

$$\omega(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) = (\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1 ... i_k} \delta^{i_1} \wedge ... \wedge \delta^{i_k})(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$$

für alle k-Tupel $(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$. So folgt die Behauptung. □

2.4 Differentialformen auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit

Führe nun den Begriff der *Differentialform* ein mittels

Definition 2.6. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Unter einer ***Differentialform der Ordnung k*** oder ***k-Form*** ω auf M versteht man eine Abbildung

$$\omega : M \longrightarrow \bigcup_{x \in M} \mathrm{Alt}^k(T_x M),$$

die jedem $x \in M$ eine alternierende k-Form $\omega_x \in \mathrm{Alt}^k(T_x M)$

$$\omega_x : (T_x M)^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

zuordnet.

Eine 0-Form wird als eine reellwertige Funktion $\omega : M \to \mathbb{R}$ definiert.

Die Menge der glatten k-Formen auf M wird mit $\Omega^k(M)$ bezeichnet. Mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation wird auch $\Omega^k(M)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Aufgrund der Festlegung $\mathrm{Alt}^0(T_x M) = \mathbb{R}$ gilt $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.

2.5 Das Dachprodukt $\wedge$ von Differentialformen

In obiger Form ist das Dachprodukt zunächst nur ein Begriff der multilinearen Algebra. Nun soll es auf Differentialformen verallgemeinert werden, um es für die Analysis auf Mannigfaltigkeiten verwenden zu können. Aufgrund der punktweisen Definition einer Differentialform als alternierende Linearform überträgt es sich gewissermaßen von selbst sinngemäß auf Differentialformen. Dieses geschieht in

Definition 2.7. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Das ***Dachprodukt von Differentialformen*** auf M

$$\wedge : \Omega^r(M) \times \Omega^s(M) \longrightarrow \Omega^{r+s}(M),\ (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$$

wird punktweise definiert durch

$$(\omega \wedge \eta)_x := \omega_x \wedge \eta_x,\ x \in M.$$

Das Dachprodukt mit einer 0-Form, d.h. einer reellwertigen Funktion, ist dann das gewöhnliche Produkt:

$$f \wedge \eta = f\eta,\ f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M).$$

Das obige **Lemma 2.4** liefert nun völlig analog

Lemma 2.8. *Für jede Mannigfaltigkeit M wird die direkte Summe*

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M)$$

durch das Dachprodukt zu einer graduierten antikommutativen Algebra mit Einselement.

2.6 Die Räume $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$

Setze nun fort im Sinne von [1]. Betrachte deshalb $M = \mathbb{R}^n$.

Seien $x_1, ..., x_n$ die linearen Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$:

$$x_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, ..., x_i, ..., x_n) \mapsto x_i.$$

Definiere nun glatte 1-Formen $dx_i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ dx_i(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) := \lambda_i,$$

wobei e_i die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^n = T_x\mathbb{R}^n$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ sind. Aufgrund der Antikommutativität des Dachproduktes gelten die Beziehungen

$$dx_i \wedge dx_i = 0$$

und

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,\ i \neq j.$$

Nach obigem Satz erhält man die folgende Darstellung von k-Formen auf $\mathbb{R}^n$:

Korollar 2.9. *Für eine glatte k-Form $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\omega_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} f_{i_1...i_k}(x) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

mit eindeutig bestimmten glatten Koeffizientenfunktionen $f_{i_1...i_k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Insbesondere ist für $k = n$

$$\omega_x = f(x) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus *Satz 2.5* mit $f_{i_1...i_k}(x) = \omega_x(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$. □

Schreibweise. Für $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ mit der Darstellung

$$\omega_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} f_{i_1...i_k}(x) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

schreibe

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

mit $I := (i_1, ..., i_k)$, wobei $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$, $f_I := f_{i_1...i_k}$ und $dx_I := dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$. In dieser Schreibweise ist das Dachprodukt zweier Differentialformen $\omega = \sum_I f_I dx_I$ und $\eta = \sum_J g_J dx_J$ (im Unterschied zur *basisfreien* Darstellung) gegeben durch

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} f_I g_J dx_I \wedge dx_J.$$

2.7 Äußere Ableitung von Differentialformen

Eine Ableitung von Differentialformen wird gegeben durch

Definition 2.10. Die ***äußere Ableitung von Differentialformen*** $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ wird definiert durch den Differentialoperator

$$d : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

mit den Eigenschaften

1. Für $\omega = f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $d\omega = df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.
2. Falls $\omega = \sum\limits_I f_I dx_I$ ist, so gilt $d\omega = \sum\limits_I df_I \wedge dx_I$.

Daß die äußere Ableitung d als abstrakte Erweiterung der Vektoranalysis auf $\mathbb{R}^3$ die klassischen Differentialoperatoren für Vektorfelder birgt, zeigt

Beispiel 2.11. Sei $\mathcal{V}(\mathbb{R}^3)$ der Vektorraum der glatten Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$. Wegen der Identitäten

$$\dim_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)}(\Omega^0(\mathbb{R}^3)) = \dim_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)}(\Omega^3(\mathbb{R}^3)) = 1$$

und

$$\dim_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)}(\Omega^1(\mathbb{R}^3)) = \dim_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)}(\Omega^2(\mathbb{R}^3)) = 3$$

bestehen die Isomorphien

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \cong \Omega^0(\mathbb{R}^3) \cong \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

sowie

$$\mathcal{V}(\mathbb{R}^3) \cong \Omega^1(\mathbb{R}^3) \cong \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Für Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ hat man definitionsgemäß

$$d(f) = df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i,$$

für 1-Formen erhält man

$$d(f_1dx_1+f_2dx_2+f_3dx_3) = (\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3})dx_2\wedge dx_3-(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1})dx_1\wedge dx_3+(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2})dx_1\wedge dx_2$$

sowie für 2-Formen

$$d(f_1dx_2 \wedge dx_3 - f_2dx_1 \wedge dx_3 + f_3dx_1 \wedge dx_2) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3;$$

somit gilt

$$\begin{aligned} d(\text{0-Formen}) &= \text{grad} \quad (1)\\ d(\text{1-Formen}) &= \text{rot} \quad (2)\\ d(\text{2-Formen}) &= \text{div} \quad (3)\end{aligned}$$

Im Folgenden werden die Eigenschaften der äußeren Ableitung behandelt.

Satz 2.12. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmenge. Es gilt die* Produktregel

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k\omega \wedge d\eta \quad \text{für } \omega \in \Omega^k(U), \eta \in \Omega^l(U)$$

und d hat die Komplexeigenschaft

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0 \quad \text{für jede Differentialform } \omega \in \Omega^*(U).$$

Beweis. Seien $\omega = \sum_I f_Idx_I \in \Omega^k(U)$ und $\eta = \sum_J g_Jdx_J \in \Omega^l(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} f_Ig_Jdx_I \wedge dx_J$, und es gilt

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(\sum_{I,J} f_Ig_Jdx_I \wedge dx_J)\\ &= \sum_{I,J} d(f_Ig_J) \wedge dx_I \wedge dx_J\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{I,J}(df_I g_J + f_I dg_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_{I,J} df_I g_J \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} f_I dg_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_{I,J} df_I g_J \wedge dx_I \wedge dx_J + (-1)^k \sum_{I,J} f_I dx_I \wedge dg_J \wedge dx_J \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta
\end{aligned}$$

aufgrund der Linearität von d sowie der Distributivität und Antikommutativität von $\wedge$. Für den Nachweis der Komplexeigenschaft betrachte zunächst $f \in \Omega^0(U)$:

$$\begin{aligned}
d^2 f = d(df) &= d(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i) \\
&= \sum_{i=1}^n d(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i
\end{aligned}$$

Wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen (Symmetrie in i, j)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

sowie der Antikommutativität (Schiefsymmetrie in i, j)

$$dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$$

folgt $d^2 f = 0$ für alle $f \in \Omega^0(U)$. Für eine glatte k-Form $\omega = \sum_I f_I dx_I \in \Omega^k(U)$ gilt unter Verwendung der Produktregel

$$\begin{aligned}
d^2\omega &= d^2(\sum_I f_I dx_I) = d(\sum_I df_I \wedge dx_I) \\
&= \sum_I d(df_I \wedge dx_I) \\
&= \sum_I (\underbrace{d^2 f_I}_{=0} \wedge dx_I - df_I \wedge \underbrace{d^2 x_I}_{=0}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

womit die Komplexeigenschaft von d gezeigt ist. □

Zum Schluß dieses Abschnitts noch eine Definition, die für den de Rham-Komplex von Bedeutung sein wird.

Definition 2.13. (Geschlossene & exakte k-Formen). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

1. Eine k-Form $\omega \in \Omega^k(U)$ heißt **geschlossen**, falls $d\omega = 0$, d.h. $\omega \in \ker d$.
2. Eine k-Form $\omega \in \Omega^k(U)$ $(k \geq 1)$ heißt **exakt**, falls es $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ gibt mit $d\eta = \omega$, d.h. $\omega \in \operatorname{im} d$.

Bemerkung 2.14. Wegen der Komplexeigenschaft von d sind exakte Formen stets geschlossen, also gilt

$$\operatorname{im}\{d : \Omega^{k-1}(U) \longrightarrow \Omega^k(U)\} \subset \ker\{d : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)\}.$$

2.8 Zurückziehen von Differentialformen

Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und f eine glatte Funktion

$$f : M \longrightarrow N.$$

Dann induziert f in kanonischer Weise eine lineare Abbildung

$$f^* := \Omega^* f : \Omega^*(N) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

durch

Definition 2.15. Für eine k-Form $\omega \in \Omega^*(N)$ auf N heißt die durch

$$(f^*\omega)_x(v_1, ..., v_k) := \omega_{f(x)}(df_x v_1, ..., df_x v_k),\ v_1, ..., v_k \in T_x M$$

gegebene k-Form auf M die **zurückgezogene k-Form $f^*\omega \in \Omega^*(M)$ auf M.**

Eine 0-Form $g \in \Omega^0(N)$ wird dann zurückgezogen durch die Abbildung

$$f^* : \Omega^0(N) \longrightarrow \Omega^0(M),\ g \longmapsto f^*(g) = g \circ f.$$

Nun definiere endlich die Glattheit einer Differentialform:

Definition 2.16. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine k-Form ω auf M heißt ***glatt***, falls für jede Karte $\Phi : U \to V \subset \mathbb{R}^N$ von M alle Funktionen

$$(\Phi^{-1})^*\omega(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) : V \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (\Phi^{-1})^*\omega_x(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$$

glatt sind.

Lemma 2.17. *Das Zurückziehen f^* hat die Eigenschaften*

1. *Die Abbildung f^* ist linear:*
$$f^*(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda f^*\omega_1 + \mu f^*\omega_2,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \omega_1,\omega_2 \in \Omega^k(N).$$
2. $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta,\ \omega,\eta \in \Omega^*(N)$.

Beweis. Ist einfach & erfolgt durch Einsetzen in die Definitionen. □

Seien nun $V \subset \mathbb{R}^m$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen , sowie $f : V \to U$ eine glatte Abbildung. Nach dem vorangehenden Lemma erfolgt das Zurückziehen einer Form

$$\omega = \sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} g_{i_1\ldots i_k} dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k} \in \Omega^*(U)$$

auf U mittels f nach V durch Zurückziehen der Koeffizientenfunktionen $g_{i_1\ldots i_k}$ und der Differentiale dy_i für sich. Die Abbildung f ist von der Form

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1,..,x_m) \end{pmatrix}.$$

Nach Definition ist
$$(f^*dy_i)_x(v) = (dy_i)(df_x v),$$
was aber gerade die i-te Komponente $df_i(x)(v)$ von $df_x(v)$ ist. Damit ergibt sich

$$f^*dy_i = df_i = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} dx_\mu.$$

Hieraus erhalte für

$$\omega = \sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} g_{i_1\ldots i_k} dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}$$

die auf V zurückgezogene Form

$$f^*\omega = \sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (g_{i_1\ldots i_k} \circ f) df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}.$$

Auf diese Weise hat man eine andere Darstellung von f^* gefunden:

$$\begin{aligned} f^* := \Omega^* f : \Omega^*(U) &\longrightarrow \Omega^*(V), \\ f^*(\sum_I g_I dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) &= \sum_I (g_I \circ f) df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}. \end{aligned}$$

Zum Ende dieses Abschnitts soll noch eine wichtige Eigenschaft des Zurückziehens von Formen nachgewiesen werden:

Lemma 2.18. *f^* kommutiert mit der äußeren Ableitung d (d ist **natürlich**), d.h.*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega),\ \omega \in \Omega^k(U)$$

Beweis. Betrachte zunächst den Fall $k = 0$. Sei also $\phi \in \Omega^0(U)$, d.h. eine glatte Funktion $\phi : U \to \mathbb{R}$. Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} d(f^*\phi) &= d(\phi \circ f) = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial x_\lambda} dx_\lambda \\ &= \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{n} (\frac{\partial \phi}{\partial y_\mu} \circ f) \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda} dx_\lambda \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} (\frac{\partial \phi}{\partial y_\mu} \circ f) df_\mu \\ &= f^*(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial y_\mu} dy_\mu) \\ &= f^*(d\phi). \end{aligned}$$

Für eine beliebige glatte k-Form $\omega = \sum_I g_I dy_I \in \Omega^k(U)$ gilt nach obigen Überlegungen $f^*\omega = \sum_I (g_I \circ f) df_I$. Mit **Lemma 2.17** ist

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= \sum_I d(g_I \circ f) \wedge df_I \\ &= \sum_I d(f^* g_I) \wedge d(f^* y_I) \\ &= \sum_I f^*(dg_I) \wedge f^*(dy_I) \\ &= f^*(\sum_I dg_I \wedge dy_I) \\ &= f^*(d\omega). \end{aligned}$$

Somit folgt die Kommutativität mit d im Allgemeinen. □

Den Schluß bildet folgendes Lemma, welches später die Funktoreigenschaften von Ω^* bereitstellen wird:

Lemma 2.19. *Seien $f : M \to N$ und $g : N \to L$ glatte Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten L, M, N. Dann gilt für $\omega \in \Omega^*(L)$*

$$f^*(g^*\omega) = (g \circ f)^*\omega,$$

also

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^*.$$

Für die Identität $\mathrm{id}_M : M \to M$ ist

$$\mathrm{id}^*\omega = \omega,\ \ \omega \in \Omega^*(M),$$

also

$$(\mathrm{id}_M)^* = \mathrm{id}_{\Omega^*(M)}.$$

Beweis. Einsetzen in die Definition liefert für eine k-Form $\omega \in \Omega^*(L)$ und $v_1, ..., v_k \in T_xM$ unter Verwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned} ((g \circ f)^*\omega)_x(v_1, ..., v_k) &= \omega_{(g\circ f)(x)}(d(g \circ f)_x v_1, ..., d(g \circ f)_x v_k) \\ &= \omega_{g(f(x))}(dg_{f(x)} df_x v_1, ..., dg_{f(x)} df_x v_k) \\ &= (g^*\omega)_{f(x)}(df_x v_1, ..., df_x v_k) \\ &= (f^*(g^*\omega))_x(v_1, ..., v_k), \end{aligned}$$

womit $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ gezeigt ist. Für die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_M : M \to M$ gilt mit $\omega \in \Omega^*(M)$ und $v_1, ..., v_k \in T_xM$ wegen $d(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{TM} : TM \to TM$, wobei $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM \times \{x\}$ das Tangentialbündel von M ist:

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_M^*\omega)_x(v_1, ..., v_k) &= \omega_{\mathrm{id}_M(x)}(d(\mathrm{id}_M)_x v_1, ..., d(\mathrm{id}_M)_x v_k) \\ &= \omega_x(\mathrm{id}_{T_xM} v_1, ..., \mathrm{id}_{T_xM} v_k) \\ &= \omega_x(v_1, ..., v_k), \end{aligned}$$

womit also auch $(\mathrm{id}_M)^* = \mathrm{id}_{\Omega^*(M)}$ bewiesen ist. □

3 Elemente der homologischen Algebra

Als Vorbereitung des de Rham-Komplexes und Grundlage der späteren Mayer-Vietoris-Sequenz werden hier ausgewählte Aspekte der homologischen Algebra begründet und dargestellt. Weiteres ist vor allem [6] zu entnehmen.

3.1 Kettenkomplexe und Kettenabbildungen

Hier erfolgt zunächst die Definition von Kettenkomplexen und ihren Homomorphismen.

Definition 3.1. Ein ***Kettenkomplex*** C ist eine Sequenz

$$... \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d_{q-1}} C^q \xrightarrow{d_q} C^{q+1} \longrightarrow ...$$

von Vektorräumen C^i und Homomorphismen d_i $(i \in \mathbb{Z})$, so daß

$$d_q \circ d_{q-1} = 0 \text{ für alle } q \in \mathbb{Z}$$

gilt. Dabei wird C als die direkte Summe $C := \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q$ geschrieben. Die ***q-te Homologiegruppe von C*** wird definiert durch

$$H^q(C) := \frac{\ker d_q}{\operatorname{im} d_{q-1}}.$$

Die ***Homologie*** $H(C)$ von C ist die direkte Summe von Vektorräumen

$$H(C) := \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(C).$$

Definition 3.2. Ein Homomorphismus f zwischen zwei Kettenkomplexen A, B

$$f : A \longrightarrow B$$

heißt eine ***Kettenabbildung*** oder ***Kettenhomomorphismus***, falls er mit den Operatoren d_A, d_B von A und B kommutiert:

$$f \circ d_A = d_B \circ f$$

mit anderen Worten: falls für alle $q \in \mathbb{Z}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^{q+1} & \xrightarrow{f} & B^{q+1} \\ {\scriptstyle d_A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d_B} \\ A^q & \xrightarrow{f} & B^q \end{array}$$

kommutativ ist.

3.2 Exakte Sequenzen und das Zick-Zack-Lemma (Schlangen-Lemma)

Wenden wir uns nun einer besonderen Klasse von Sequenzen zu, den exakten Sequenzen.

Definition 3.3. Eine Sequenz von Vektorräumen V_i

$$... \longrightarrow V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \longrightarrow ...$$

heißt **exakt**, falls gilt: $\ker f_i = \text{im } f_{i-1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

wird eine **kurze exakte Sequenz** genannt.

Einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen A, B, C mit Operatoren d_A, d_B, d_C

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

mit Kettenabbildungen f und g entspricht das folgende Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & ... & & ... & & ... & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{q+1} & \xrightarrow{f} & B^{q+1} & \xrightarrow{g} & C^{q+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d_A & & \uparrow d_B & & \uparrow d_C & & \\
0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{f} & B^q & \xrightarrow{g} & C^q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d_A & & \uparrow d_B & & \uparrow d_C & & \\
0 & \longrightarrow & A^{q-1} & \xrightarrow{f} & B^{q-1} & \xrightarrow{g} & C^{q-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & ... & & ... & & ... & &
\end{array}$$

Ihr kann nun eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen

$$... \longrightarrow H^q(A) \xrightarrow{f^*} H^q(B) \xrightarrow{g^*} H^q(C) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(A) \longrightarrow ...$$

zugeordnet werden. Dabei sind die Abbildungen f^* und g^* kanonisch gegeben durch

$$f^* : H^q(A) \longrightarrow H^q(B),\ [a] \longmapsto f^*([a]) := [f(a)]$$
$$g^* : H^q(B) \longrightarrow H^q(C),\ [b] \longmapsto g^*([b]) := [g(b)].$$

Definition 3.4. Sei $C = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q$ ein Kettenkomplex mit Operator d_C. Ein Element $c_q \in C^q$ heißt ein ***Zykel***, falls $d_C(c_q) = 0$ ist, also $c_q \in \ker d_C \cap C^q$. Ein Element $c_k \in C^k$ heißt ***Rand***, falls es $c_{k-1} \in C^{k-1}$ gibt, so daß $d_C(c_{k-1}) = c_k$, also $c_k \in \text{im } d_C \cap C^k$.

Es ist nun natürlich die Wohldefiniertheit der Abbildungen f^* und g^* zu prüfen; dieses übernimmt das nächste

Lemma 3.5. *Die Abbildungen f^* und g^* sind wohldefinierte Homomorphismen.*

Beweis. Betrachte die Abbildung $f^* : H^q(A) \longrightarrow H^q(B)$, definiert durch $f^*([a]) := [f(a)]$.

1. $\underline{f^*[a] \in H^q(B)}$. Sei dazu $a_q \in A^q$ ein Zykel, dann ist $[a_q] \in H^q(A)$. Es gilt nun $d_B(f(a_q)) = f(d_A(a_q)) = f(0) = 0$, da f Kettenhomomorphismus ist. Also ist auch $f(a_q) \in B^q$ ein Zykel, d.h. $f^*[a_q] \in H^q(B)$.

2. $\underline{f^*[a] = f^*[a + d_A(\tilde{a})]}$. Seien $a_q, \tilde{a}_q \in A^q$ Zykeln, und es gelte $[a_q] = [\tilde{a}_q] \in H^q(A)$. Dann unterscheiden sich a_q und $\tilde{a}_q$ nur durch einen Rand: $a_q - \tilde{a}_q = d_A(a_{q-1})$. Nun gilt $f(a_q - \tilde{a}_q) = f(d_A(a_{q-1})) = d_B(f(a_{q-1}))$, also $f(a_q) - f(\tilde{a}_q) = d_B(f(a_{q-1}))$, d.h. $f(a_q)$ und $f(\tilde{a}_q)$ unterscheiden sich nur durch einen Rand in B^q. Es folgt $[f(a_q)] = [f(\tilde{a}_q)]$ und damit $f^*[a_q] = f^*[\tilde{a}_q]$.

3. $\underline{f^* \text{ ist ein Homomorphismus}}$. Seien $a_q, \tilde{a}_q \in A^q$ Zykeln wie oben. Mit den natürlichen Definitionen $[a] + [\tilde{a}] := [a + \tilde{a}]$ und $\lambda[a] := [\lambda a]$ $(\lambda \in \mathbb{K})$ gilt für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} & f^*(\lambda[a_q] + \mu[\tilde{a}_q]) = f^*([\lambda a_q + \mu\tilde{a}_q]) \\ = \; & [f(\lambda a_q + \mu\tilde{a}_q)] = [\lambda f(a_q) + \mu f(\tilde{a}_q)] \\ = \; & \lambda[f(a_q)] + \mu[f(\tilde{a}_q)] = \lambda f^*[a_q] + \mu f^*[\tilde{a}_q]. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, da ß f^* ein wohldefinierter Homomorphismus ist. Der Beweis für g^* ist ähnlich. □

Die Existenz und Exaktheit dieser langen Sequenz (mitunter die Definition von d^*) versichert das

Satz 3.6. ***Zick-Zack-Lemma.*** *Seien A, B, C Kettenkomplexe, und sei die Sequenz*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

exakt mit Kettenabbildungen f und g. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen

$$... \longrightarrow H^q(A) \xrightarrow{f^*} H^q(B) \xrightarrow{g^*} H^q(C) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(A) \longrightarrow ...,$$

wobei d^* durch den Operator d_B von B induziert wird.

Beweis. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{q+1} & \xrightarrow{f} & B^{q+1} & \xrightarrow{g} & C^{q+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_A} & & \uparrow{\scriptstyle d_B} & & \uparrow{\scriptstyle d_C} & & \\
0 & \longrightarrow & A^{q} & \xrightarrow{f} & B^{q} & \xrightarrow{g} & C^{q} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_A} & & \uparrow{\scriptstyle d_B} & & \uparrow{\scriptstyle d_C} & & \\
0 & \longrightarrow & A^{q-1} & \xrightarrow{f} & B^{q-1} & \xrightarrow{g} & C^{q-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & &
\end{array}$$

1. Definition von d^*. Sei $c_q \in C^q$ ein Zykel, d.h. $d_C(c_q) = 0$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $b_q \in B^q$ mit $g(b_q) = c_q$. Wegen $g(d_B(b_q)) = (g \circ d_B)(b_q) = (d_C \circ g)(b_q) = d_C(g(b_q)) = d_C(c_q) = 0$ ist $d_B(b_q) \in \ker\ g$. Also existiert ein $a_{q+1} \in A^{q+1}$, so daß $f(a_{q+1}) = d_B(b_q)$. Da f wegen $\ker f = \{0\}$ injektiv ist, ist a_{q+1} eindeutig bestimmt. Weiterhin ist a_{q+1} ein Zykel, denn $f(d_A(a_{q+1})) = d_B(f(a_{q+1})) = d_B(d_B(b_q)) = 0$, also $d_A(a_{q+1}) = 0$, weil f injektiv ist. Definiere nun $d^* : H^q(C) \to H^{q+1}(A)$ durch $d^*[c_q] := [a_{q+1}]$.

2. d^* ist ein wohldefinierter Homomorphismus. Seien c_q und $\tilde{c_q}$ zwei Elemente im Kern von $d_C : C^q \to C^{q+1}$. Wähle nun $b_q, \tilde{b}_q \in B^q$, so daß $g(b_q) = c_q$ und $g(\tilde{b}_q) = \tilde{c}_q$. Dann wähle $a_{q+1}, \tilde{a}_{q+1} \in A^{q+1}$ mit $f(a_{q+1}) = d_B(b_q)$ und $f(\tilde{a}_{q+1}) = d_B(\tilde{b}_q)$.
Um die Wohldefiniertheit von d^* zu beweisen, nehme an, daß $[c_q] = [\tilde{c}_q]$ ist und zeige die Gleichheit $[a_{q+1}] = [\tilde{a}_{q+1}]$. Sei also $[c_q] = [\tilde{c}_q]$, was gleichbedeutend ist mit $c_q - \tilde{c}_q = d_C(c_{q-1})$. Wähle $b_{q-1} \in B^{q-1}$ derart, daß $g(b_{q-1}) = c_{q-1}$. Dann gilt $g(b_q - \tilde{b}_q - d_B(b_{q-1})) = c_q - \tilde{c}_q - d_C(g(b_{q-1})) = c_q - \tilde{c}_q - d_C(c_{q-1}) = 0$. Also gibt es aufgrund der Exaktheit der Sequenz $a_q \in A^q$ mit $f(a_q) = b_q - \tilde{b}_q - d_B(b_{q-1})$. Dann ist $f(d_A(a_q)) = d_B(f(a_q)) = d_B(b_q - \tilde{b}_q - d_B(b_{q-1})) = d_B(b_q - \tilde{b}_q - 0) = f(a_{q+1} - \tilde{a}_{q+1})$. Mit der Injektivität von f folgt $d_A(a_q) = a_{q+1} - \tilde{a}_{q+1}$ und somit $[a_{q+1}] = [\tilde{a}_{q+1}]$, womit die Wohldefiniertheit von d^* gezeigt ist.
d^* ist ein Homomorphismus: es ist $g(b_q + \tilde{b}_q) = c_q + \tilde{c}_q$ und $f(a_{q+1} + \tilde{a}_{q+1}) = d_B(b_q + \tilde{b}_q)$, und demnach ist $d^*[c_q + \tilde{c}_q] = [a_{q+1} + \tilde{a}_{q+1}]$ sowie auf natürliche Weise $[a_{q+1} + \tilde{a}_{q+1}] = [a_{q+1}] + [\tilde{a}_{q+1}]$, also schließlich $d^*[c_q + \tilde{c}_q] = d^*[c_q] + d^*[\tilde{c}_q]$. Analog erfolgt die Skalarmultiplikation.

3. Exaktheit bei $H^q(B)$. Sei $\gamma \in H^q(B)$. Wegen $g \circ f = 0$ ist auch $g^* \circ f^* = 0$, denn für $a_q \in A^q$ ist $(g^* \circ f^*)(a_q) = g^*(f^*(a_q)) = g^*[f(a_q)] = [g(f(a_q))] = [0] = 0$. Wenn also $\gamma \in \mathrm{im} f^*$, dann ist $g^*(\gamma) = 0$: damit gilt $\mathrm{im} f^* \subset \ker g^*$.
Sei nun $\gamma = [b_q]$ und $g^*(\gamma) = [g(b_q)] = [0]$, also $\gamma \in \ker g^*$. Dann ist $g(b_q) = d_C(c_{q-1})$. Wähle $b_{q-1} \in B^{q-1}$ so, daß $g(b_{q-1}) = c_{q-1}$; dann gilt $g(b_q - d_B(b_{q-1})) = g(b_q) - d_C(g(b_{q-1})) = 0$, also $b_q - d_B(b_{q-1}) \in \ker g$. Aus Exaktheitsgründen gibt es nun ein $a_q \in A^q$ mit $f(a_q) = b_q - d_B(b_{q-1})$. Nun ist a_q ein Zykel, denn $f(d_A(a_q)) = d_B(f(a_q)) = d_B(b_q - d_B(b_{q-1})) = d_B(b_q) - 0 = 0$, da b_q ein Zykel ist; weil f injektiv ist, ist nun $d_A(a_q) = 0$. Es gilt also

$f^*[a_q] = [f(a_q)] = [b_q - d_B(b_{q-1})] = [b_q] = \gamma$, also $\gamma \in \mathrm{im} f^*$. Das bedeutet die Inklusion $\ker g^* \subset \mathrm{im} f^*$. Es folgt damit $\ker g^* = \mathrm{im} f^*$ und somit die Exaktheit bei $H^q(B)$.

4. Exaktheit bei $H^q(C)$. Sei $\alpha = [c_q] \in H^q(C)$. Wähle $b_q \in B^q$ so, daß $g(b_q) = c_q$, dann $a_{q+1} \in A^{q+1}$ mit $f(a_{q+1}) = d_B(b_q)$. Dann ist $d^*(\alpha) = [a_{q+1}]$ nach Definition. Falls $\alpha \in \mathrm{im}\ g^*$ ist, so ist $\alpha = [g(b_q)]$, wobei b_q ein Zykel in B^q ist. Also ist $d_B(b_q) = 0$ und damit $a_{q+1} = 0$, denn $f(a_{q+1}) = d_B(b_q) = 0$ und f ist injektiv. Also gilt $d^*(\alpha) = [a_{q+1}] = [0]$. Somit ergibt sich $\mathrm{im} g^* \subset \ker d^*$.
Sei andersherum $d^*(\alpha) = [0]$, also $\alpha \in \ker d^*$. Dann ist $a_{q+1} = d_A(a_q)$ für geeignetes $a_q \in A^q$. Nun ist $b_q - f(a_q)$ ein Zykel in B^q, denn $d_B(b_q - f(a_q)) = d_B(b_q) - f(d_A(a_q)) = d_B(b_q) - f(a_{q+1}) = 0$. Weiterhin ist $g^*[b_q - f(a_q)] = [g(b_q) - g(f(a_q))] = [g(b_q) - 0] = [c_q] = \alpha$, d.h. $\alpha \in \mathrm{im}\ g^*$. Erhalte so die Inklusion $\ker d^* \subset \mathrm{im}\ g^*$.
Es folgt die Exaktheit der Sequenz bei $H^q(C)$: $\mathrm{im}\ g^* = \ker d^*$.

5. Exaktheit bei $H^{q+1}(A)$. Sei $\beta \in H^{q+1}(A)$. Falls $\beta \in \mathrm{im}\ d^*$, so ist definitionsgemäß $\beta = [a_{q+1}]$, wobei $f(a_{q+1}) = d_B(b_q)$ für geeignetes $b_q \in B^q$ ist. Dann ist aber $f^*(\beta) = [f(a_{q+1})] = [d_B(b_q)] = [0]$. Somit gilt $\mathrm{im}\ d^* \subset \ker f^*$.
Andersherum sei $f^*(\beta) = 0$, d.h. $\beta \in \ker f^*$. Weiterhin sei $\beta = [a_{q+1}]$. Dann ist $[f(a_{q+1})] = [0]$, also $f(a_{q+1}) = d_B(b_q)$ für $b_q \in B^q$ geeignet. Definiere nun $c_q := g(b_q)$. Dann ist c_q ein Zykel, denn $d_C(c_q) = d_C(g(b_q)) = g(d_B(b_q)) = g(f(a_{q+1})) = 0$. Darüberhinaus ist $\beta = d^*[c_q]$ nach Definition und daher $\beta \in \mathrm{im}\ d^*$. Somit gilt auch die Inklusion $\ker f^* \subset \mathrm{im}\ d^*$.
Es folgt $\mathrm{im}\ d^* = \ker f^*$, was die Exaktheit bei $H^{q+1}(A)$ bedeutet.

Insgesamt ist damit gezeigt, daß die lange Sequenz

$$\dots \longrightarrow H^q(A) \xrightarrow{f^*} H^q(B) \xrightarrow{g^*} H^q(C) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(A) \longrightarrow \dots$$

durch die Existenz der Abbildungen f^*, g^* und d^* existiert und an jeder Stelle exakt ist. $\square$

Als Übergang zum de Rham-Komplex dient die nachstehende

Definition 3.7. (Differentialkomplexe). Eine direkte Summe

$$C = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q$$

von Vektorräumen C^q ($q \in \mathbb{Z}$) bezeichnet man als einen **Differentialkomplex**, falls es Homomorphismen d gibt mit

$$\dots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d} C^q \xrightarrow{d} C^{q+1} \longrightarrow \dots$$

und der Komplexeigenschaft $d^2 = 0$. Dabei heißt d der **Differentialoperator** des Komplexes C. Die **Kohomologie** von C ist die direkte Summe

$$H(C) := \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(C)$$

der Quotientenvektorräume

$$H^q(C) := \frac{\ker d \cap C^q}{\mathrm{im}\ d \cap C^q},$$

wobei $H^q(C)$ die q**-te Kohomologiegruppe von C** ist.

4 Der de Rham-Komplex von $\mathbb{R}^n$

Dieser Abschnitt behandelt den de Rham-Komplex von $\mathbb{R}^n$. Zuerst wird der gewöhnliche Komplex dargestellt und eine leichte Rechnung durchgeführt, dann betrachte ihn für Formen mit kompaktem Träger. Die Argumentation folgt [1] und verwendet insbesondere auch Elemente von [4].

4.1 Der de Rham-Komplex $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$ von $\mathbb{R}^n$

Wir beginnen mit der Definition des de Rham-Komplexes:

Definition 4.1. Die durch die Vektorräume $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ und den Differentialoperator d gegebene Sequenz

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} ...$$

heißt der ***de Rham-Komplex*** $\Omega^*(\mathbb{R}^n) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ ***von*** $\mathbb{R}^n$.

Da nach **Bemerkung 1.14** stets die Inklusion

$$\operatorname{im}\{d : \Omega^{k-1}(U) \longrightarrow \Omega^k(U)\} \subset \ker\{d : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)\}$$

gilt, ist es möglich den Quotientenvektorraum

$$\frac{\ker d \cap \Omega^k(U)}{\operatorname{im}\, d \cap \Omega^k(U)}$$

zu bilden. Diese Tatsache veranlaßt

Definition 4.2. Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ definiere die ***k-te de Rham Kohomologiegruppe von*** U durch den Quotientenvektorraum

$$H^k_{DR}(U) := \frac{\ker\{d : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)\}}{\operatorname{im}\, \{d : \Omega^{k-1}(U) \longrightarrow \Omega^k(U)\}} = \frac{\{\text{geschlossene } k\text{-Formen auf } U\}}{\{\text{exakte } k\text{-Formen auf } U\}}.$$

Für eine geschlossene k-Form $\omega \in \Omega^k(U)$ heißt die Nebenklasse

$$[\omega] := \omega + d\Omega^{k-1}(U) \in H^k_{DR}(U)$$

die ***Kohomologieklasse*** von ω. Die direkte Summe $H^*_{DR}(U) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k_{DR}(U)$ wird als die ***de Rham-Kohomologie von*** U bezeichnet.

Bemerkung 4.3. Der de Rham-Komplex kann als eine Sammlung von Differentialgleichungen angesehen werden, die durch die geschlossenen Formen gelöst werden: z.B. ist das Finden einer geschlossenen Form $fdx + gdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ gleichwertig mit dem Lösen der Differentialgleichung $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, denn aus $d(fdx + gdy) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} & df \wedge dx + dg \wedge dy = (\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy) \wedge dx + (\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy) \wedge dy \\ = \quad & \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy \\ = \quad & (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Nun sollen einfache Kohomologiegruppen berechnet werden:

Beispiel 4.4. (Einfache Kohomologiegruppen von $\mathbb{R}^n$).

1. Betrachte als erstes den Fall $n = 0$. Dann ist für $k = 0$
$$H^0_{DR}(\{0\}) = \frac{\mathcal{C}^\infty(\{0\})}{\{0\}} \cong \mathbb{R}$$
und für $k > 0$
$$H^k_{DR}(\{0\}) = \frac{\{0\}}{\{0\}} = 0.$$

2. Sei nun n=1. Da $\ker d \cap \Omega^0(\mathbb{R}^1)$ gerade die konstanten Funktionen sind, ergibt sich
$$H^0_{DR}(\mathbb{R}^1) = \frac{\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) | f \equiv c \in \mathbb{R}\}}{\{0\}} \cong \mathbb{R}.$$
Für eine 1-Form $\omega = g(x)dx \in \Omega^1(\mathbb{R})$ erhält man durch
$$f = \int_0^x g(y)dy$$
die Gleichheit
$$df = g(x)dx,$$
was wegen Linearität von Integral $\int$ und äußerer Ableitung d impliziert, daß jede 1-Form auf $\mathbb{R}^1$ exakt ist, womit sich ergibt:
$$H^1_{DR}(\mathbb{R}^1) = \frac{\Omega^1(\mathbb{R})}{\Omega^1(\mathbb{R})} = 0,$$
denn wegen
$$\begin{aligned} d(\sum_i f_i dx) &= \sum_i d(f_i dx) = \sum_i df_i \wedge dx \\ &= \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x} dx \wedge dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

ist jede 1-Form auf $\mathbb{R}$ auch geschlossen.

3. Sei $U := \coprod_{i=1}^m U^{(i)}$ die disjunkte Vereinigung m offener Intervalle $U^{(i)} := (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}^1$. Dann ist wegen $H^q_{DR}(U^{(i)}) \cong H^q_{DR}(\mathbb{R}^1)$

$$H^0_{DR}(U) = \bigoplus_{i=1}^m H^0_{DR}(U^{(i)}) \cong \mathbb{R}^m$$

und auf die gleiche Weise

$$H^1_{DR}(U) = \bigoplus_{i=1}^m H^1_{DR}(U^{(i)}) = 0.$$

4. Im Allgemeinen gilt nach dem *Poincaré-Lemma*

$$H^*(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{für Dimension } 0 \\ 0, & \text{sonst .} \end{cases}$$

4.2 Der de Rham-Komplex $\Omega^*_c(\mathbb{R}^n)$ von $\mathbb{R}^n$ mit kompakten Trägern

Definition 4.5. Unter dem **Träger** $\mathrm{supp}(f)$ einer stetigen Funktion f auf einem topologischen Raum X versteht man die abgeschlossene Hülle der Menge derjenigen Punkte in X, in denen f nicht verschwindet, also

$$\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}} \subset X.$$

Entsprechend versteht man unter dem *Träger* einer Differentialform ω auf einer Mannigfaltigkeit M die M-abgeschlossene Hülle der Menge der Punkte $x \in M$ mit $\omega(x) \neq 0$.

Die Menge der glatten Differentialformen auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger wird mit $\Omega^*_c(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Jede Form $\omega \in \Omega^*_c(\mathbb{R}^n)$ besitzt genau eine Darstellung

$$\omega_x = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1 \ldots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizientenfunktionen

$$f_{i_1 \ldots i_k} \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ der Vektorraum der glatten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist.

Notation. Die Kohomologie des Komplexes $\Omega_c^*(\mathbb{R}^n)$ wird als $H_c^*(\mathbb{R}^n)$ geschrieben.

Nun werden entsprechend **Beispiel 4.4** einige kompakte de Rham-Kohomologiegruppen berechnet:

Beispiel 4.6. (Einige kompakte Kohomologiegruppen von $\mathbb{R}^n$).

1. Da eine auf einer einpunktigen Menge $A := \{a\} \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion stets einen kompakten Träger hat, gilt wie oben
$$H_c^q(A) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } q = 0 \\ 0, & \text{falls } q > 0 \end{cases}$$

2. **Die kompakte Kohomologie von $\mathbb{R}^1$.** Die geschlossenen 0-Formen auf $\mathbb{R}^1$ sind die konstanten Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^1)$. Da es aber keine konstanten $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf $\mathbb{R}^1$ mit kompaktem Träger gibt, ist
$$H_c^0(\mathbb{R}^1) = 0$$
Zur Berechnung von $H_c^1(\mathbb{R}^1)$ betrachte die Integralabbildung
$$\int_{\mathbb{R}^1} : \Omega_c^1(\mathbb{R}^1) \longrightarrow \mathbb{R}^1.$$
Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv. Sie verschwindet auf den exakten 1-Formen $df \in \Omega_c^1(\mathbb{R}^1)$, falls f kompakten Träger $\operatorname{supp}(f) \subset [a,b] \subset \mathbb{R}^1$ besitzt, denn
$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{df}{dx} dx = \int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a) = 0.$$
Für $g(x)dx \in \ker \int_{\mathbb{R}^1} \subset \Omega_c^1(\mathbb{R}^1)$ hat die Funktion
$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(y)dy$$
kompakten Träger und es gilt
$$df = g(x)dx.$$
Also sind die exakten 1-Formen auf $\mathbb{R}^1$ mit kompaktem Träger gerade der Kern von $\int_{\mathbb{R}^1}$ und damit ist
$$H_c^1(\mathbb{R}^1) = \frac{\Omega_c^1(\mathbb{R}^1)}{\ker \int_{\mathbb{R}^1}} \cong \mathbb{R}^1.$$

3. Im Allgemeinen gilt nach dem *Poincaré-Lemma für Kohomologie mit kompakten Trägern*
$$H_c^*(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{für Dimension } n \\ 0, & \text{sonst }. \end{cases}$$

5 Die Funktoren Ω^* und Ω_c^*

Um über die funktoriellen Eigenschaften des de Rham-Komplexes eine Aussage zu machen, führe zunächst - angelehnt an [3] - die Begriffe der Kategorie und des Funktors ein.

5.1 Kategorien und Funktoren

Definition 5.1. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ setzt sich aus folgenden Daten zusammen

1. einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von Objekten *(Objekte der Kategorie $\mathcal{C}$)*.
2. einer Menge $\mathrm{Mor}(X, Y)$ von Morphismen zu jedem Paar (X, Y) von Objekten *(Morphismen von X nach Y)*.
3. einer Verknüpfung $\mathrm{Mor}(X, Y) \times \mathrm{Mor}(Y, Z) \to \mathrm{Mor}(X, Z)$ zu je drei Objekten X, Y, Z (Notation: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, (f, g) \mapsto g \circ f$) (*Komposition von Morphismen*).

Diese Daten bilden eine ***Kategorie***, wenn sie die folgenden Axiome erfüllen:

- ASSOZIATIVITÄT. Sind $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} A$ Morphismen, so gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- IDENTITÄT. Zu jedem Objekt X gibt es einen Morphismus $1_X \in \mathrm{Mor}(X, X)$ mit $1_X \circ f = f$ und $g \circ 1_X = g$ für alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(Y, X)$ und $g \in \mathrm{Mor}(X, Z)$.

Einige Kategorien versammelt

Beispiel 5.2.

- Kategorie der Mengen: Mengen, Abbildungen
- Topologische Kategorie: Topologische Räume, stetige Abbildungen
- Kategorie der Gruppen: Gruppen, Gruppenhomomorphismen
- Kategorie der Vektorräume über $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen
- Differentialtopologische Kategorie: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, differenzierbare Abbildungen

Definition 5.3. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein ***kovarianter Funktor***

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ist eine Zuordnung, durch die zu jedem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt $\mathcal{F}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ und zu jedem Morphismus $\phi \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ von $\mathcal{C}$

$$\phi : X \longrightarrow Y$$

ein Morphismus $\mathcal{F}(\phi) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ von $\mathcal{D}$

$$\mathcal{F}(\phi) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$$

gegeben ist, so daß

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1_X) &= 1_{\mathcal{F}(X)} \\ \mathcal{F}(\phi \circ \psi) &= \mathcal{F}(\phi) \circ \mathcal{F}(\psi) \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Definition 5.4. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein ***kontravarianter Funktor***

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ist eine Zuordnung, die zu jedem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt $\mathcal{F}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ und zu jedem Morphismus $\phi \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ von $\mathcal{C}$

$$\phi : X \longrightarrow Y$$

einen Morphismus $\mathcal{F}(\phi) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$ von $\mathcal{D}$

$$\mathcal{F}(\phi) : \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$$

liefert, so daß

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1_X) &= 1_{\mathcal{F}(X)} \\ \mathcal{F}(\phi \circ \psi) &= \mathcal{F}(\psi) \circ \mathcal{F}(\phi) \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Die beiden Definitionen sind gleich, bis auf den Unterschied, daß der kontravariante Funktor $\mathcal{F}$ die Richtung der Morphismen umkehrt: jedem Morphismus von $\mathcal{C}$

$$X \stackrel{\phi}{\to} Y$$

wird ein Morphismus von $\mathcal{D}$

$$\mathcal{F}(X) \stackrel{\mathcal{F}(\phi)}{\leftarrow} \mathcal{F}(Y)$$

zugeordnet; damit muß auch die Kettenregel umgekehrt werden.

5.2 Der kontravariante Funktor Ω^*

Nach **Lemma 2.8** wird $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M)$ für jede Mannigfaltigkeit M durch das Dachprodukt $\wedge$ zu einer *graduierten antikommutativen Algebra mit Einselement*. Für $M = \mathbb{R}^n$ bedeutet das unter Berücksichtigung des Zurückziehens von Formen mittels einer glatten Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f^* = \Omega^* f : \Omega^*(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^m),$$

und den in **Lemma 2.19** nachgewiesenen Eigenschaften (wobei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ist)

$$(id_{\mathbb{R}^n})^* = id_{\Omega^*(\mathbb{R}^n)}$$
$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*,$$

daß $\Omega^* := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k$ ein *kontravarianter Funktor von der Kategorie der euklidischen Räume* $\{\mathbb{R}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *und der glatten Abbildungen* $\{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n\}$ *in die Kategorie der graduierten antikommutativen Algebren mit Einselement und deren Homomorphismen* ist. Der Funktor Ω^* kann nun erweitert werden auf die Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und den differenzierbaren Abbildungen zwischen ihnen, insbesondere auf die der glatten Mannigfaltigkeiten und glatten Abbildungen:

$$f^* = \Omega^* f : \Omega^*(N) \longrightarrow \Omega^*(M),$$

wobei M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind und $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Allgemein kann man sagen, daß durch Ω^* ein *kontravarianter Funktor von der differenzierbaren in die lineare Kategorie* gegeben ist, und es gelten (mit f wie oben):

$$(id_M)^* = id_{\Omega^*(M)}$$
$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

5.3 Der kovariante Funktor Ω^*_c

Gegenstand der Betrachtung sind nun die funktoriellen Eigenschaften der Algebra $\Omega^*_c(M)$ von Formen mit kompaktem Träger auf der Mannigfaltigkeit M.
Hier muß zunächst folgendes festgestellt werden: Ist $\omega \in \Omega^*_c(M)$ eine Form mit kompaktem Träger, so muß die mittels einer glatten Abbildung $f : M \to N$ (wobei N eine zweite Mannigfaltigkeit ist) auf N zurückgezogene Form $f^*\omega$ selbst keinen kompakten Träger haben. Dies belegt

Beispiel 5.5. Sei mit pr die Projektion

$$pr : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$$

sowie mit $pr|_U$ die Einschränkung von pr auf eine offene Teilmenge $U \subset M$, also

$$pr|_U : U \times \mathbb{R} \longrightarrow U$$

benannt, und sei $\omega \in \Omega^*_c(M)$ eine kompakt getragene k-Form auf M mit lokaler Darstellung $\omega = \sum_I (f_\psi)_I d\psi_I$ (mit $d\psi_I := d\psi_{i_1} \wedge ... \wedge d\psi_{i_k}$ und $d\psi_i = \psi^* dx_i$) zur Karte $\psi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ und $\text{supp}(\omega) \subset U$. Dann gilt für die auf $U \times \mathbb{R}$ zurückgezogene Form

$$pr|_U{}^* \omega = \sum_I ((f_\psi)_I \circ pr|_U) d(pr|_U{}^* \psi)_I.$$

Obwohl die glatten Funktionen $(f_\psi)_I : U \to \mathbb{R}$ kompakte Träger $\text{supp}((f_\psi)_I) \subset U$ besitzen, hat die Komposition

$$(f_\psi)_I \circ pr|_U : U \times \mathbb{R} \to U$$

den Träger

$$\text{supp}((f_\psi)_I \circ pr|_U) = \text{supp}((f_\psi)_I) \times \mathbb{R},$$

der seine Kompaktheit eingebüßt hat, also $pr^* \omega \notin \Omega^*_c(M)$.

Somit ist Ω^*_c kein Funktor in der Kategorie der Mannigfaltigkeiten und der glatten Abbildungen zwischen ihnen. Indem man jedoch nur bestimmte glatte Abbildungen betrachtet, kann Ω^*_c doch zu einem Funktor werden: es stellt sich heraus, daß Ω^*_c unter Inklusionen von offenen Mengen auf folgende Weise zu einem kovarianten Funktor wird:
Sei M eine Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Teilmenge und j die Inklusion

$$j : U \longrightarrow M.$$

Dann ist $j_* := \Omega^*_c j$ gegeben durch

$$j_* : \Omega^*_c(U) \longrightarrow \Omega^*_c(M), \ \omega \longmapsto j_*(\omega),$$

wobei $j_*(\omega)|_U = \omega$ und $j_*(\omega)|_{M \setminus U} = 0$ ist, d.h. j_* ist diejenige Abbildung die eine Form auf U mit 0 auf M fortsetzt. Insbesondere gilt $\text{supp}(\omega) = \text{supp}(j_*(\omega))$. Damit wird Ω^*_c zu einem *kovarianten Funktor von der Kategorie der offenen Mengen und ihren Inklusionen in die lineare Kategorie der Algebren.*

5.4 Der de Rham-Funktor H^* und die Invarianz unter Diffeomorphismen

Die Natürlichkeit des Differentialoperators d (d.h. das Kommutieren von f^* und d) bedeutet insbesondere, daß jede differenzierbare (glatte) Abbildung $f : M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten M und N einen Kettenhomomorphismus zwischen den de Rham-Komplexen $\Omega^*(M)$ und $\Omega^*(N)$ induziert, d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \xrightarrow{d} & \Omega^0(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(N) & \xrightarrow{d} & \ldots \\ & & {\scriptstyle f^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \\ 0 & \xrightarrow{d} & \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{d} & \ldots \end{array}$$

Daher ist durch den de Rham-Komplex ein *kontravarianter Funktor von der differenzierbaren Kategorie in die Kategorie der Komplexe und ihrer Kettenhomomorphismen* gegeben.

Es erfolgt nun eine weitere Ausdehnung des Dachproduktes $\wedge$ auf die de Rham-Kohomologiegruppen $H^q(M)$ einer Mannigfaltigkeit M.

Definierendes Lemma 5.6. *Das Dachprodukt*

$$\wedge : H^k(M) \times H^q(M) \longrightarrow H^{k+q}(M),\ [\omega] \wedge [\eta] := [\omega \wedge \eta]$$

und die funktoriellen Eigenschaften des de Rham-Komplexes machen

$$H^* := \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k$$

zu einem kontravarianten Funktor von der differenzierbaren Kategorie in die Kategorie der graduierten antikommutativen Algebren mit Einselement. *Der Funktor H^* heißt die* ***de Rham-Kohomlogie*** *oder der* ***de Rham-Funktor****.*

Beweis. Zunächst ist die Wohldefiniertheit des Dachproduktes $\wedge$ auf Kohomologiegruppen zu zeigen. Seien dazu $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega^q(M)$ geschlossene Formen mit zugehörigen Kohomologieklassen $[\omega] \in H^k(M)$ und $[\eta] \in H^q(M)$. Wegen $d\omega = 0$ und $d\eta = 0$ ist gilt mit der Produktregel

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta = 0,$$

also ist auch $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+q}(M)$ geschlossen, d.h.

$$[\omega] \wedge [\eta] = [\omega \wedge \eta] \in H^{k+q}(M).$$

Nun ist oBdA noch zu zeigen, daß aus $[\omega] = [\tilde{\omega}]$ auch $[\omega] \wedge [\eta] = [\tilde{\omega}] \wedge [\eta]$ folgt, d.h. daß

$$[(\omega + d\zeta) \wedge \eta] = [\omega \wedge \eta]$$

ist, was die Exaktheit von $d\zeta \wedge \eta$ bedeutet. Aufgrund von $d\eta = 0$ gilt

$$d(\zeta \wedge \eta) = d\zeta \wedge \eta + (-1)^{k-1} \zeta \wedge d\eta = d\zeta \wedge \eta,$$

also ist das Dachprodukt einer exakten mit einer geschlossenen Form stets wieder eine exakte Form. Diesem folgt die Gleichheit

$$[(\omega + d\zeta) \wedge \eta] = [\omega \wedge \eta]$$

und damit die Wohldefiniertheit des Dachprodukts für Kohomologieklassen. Für eine differenzierbare Abbildung $f : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten ist auch

$$f^* := H^* f : H^*(N) \longrightarrow H^*(M),\ [\omega] \longmapsto f^*[\omega] := [f^*\omega]$$

wohldefiniert: mit der Natürlichkeit von d ergibt sich für eine geschlossene Form $\omega \in \Omega^*(N)$ mit Kohomologieklasse $[\omega] \in H^k(N)$, daß

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$$

ist und $f^*\omega \in \Omega^*(M)$ auch geschlossen ist und somit die Kohomologieklasse $[f^*\omega] \in H^*(M)$ besitzt. Ebenso ist

$$[f^*(\omega + d\zeta)] = [f^*\omega],$$

denn wegen der Natürlichkeit von d ist

$$d(f^*\zeta) = f^*(d\zeta)$$

und $f^*(d\zeta)$ somit exakt. Sowohl die algebraischen Eigenschaften als auch die Funktoreigenschaften übertragen sich nun von Ω^* auf H^*, so daß gilt

$$\begin{aligned} H^*(id_M) = (id_M)^* &= id_{H^*(M)} \\ H^*(g \circ f) = (g \circ f)^* &= f^* \circ g^* = H^* f \circ H^* g, \end{aligned}$$

womit H^* zu einem kontravarianten Funktor von der differenzierbaren Kategorie in die lineare Kategorie der graduierten antikommutativen Algebren mit Einselement wird. □

Die so gewonnenen Funktoreigenschaften der de Rham-Kohomologie wollen wir sofort anwenden und erhalten mühelos

Lemma 5.7. *Die de Rham-Kohomologie H^* ist invariant unter Diffeomorphismen.*

Beweis. Seien M und N Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Dann gibt es eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : N \to M$ mit $f \circ f^{-1} = id_N$ und $f^{-1} \circ f = id_M$. Anwendung des de Rham-Funktors H^* liefert dann unter Benutzung der Funktoreigenschaften

$$f^* \circ (f^{-1})^* = H^* f \circ H^* f^{-1} = H^*(f^{-1} \circ f) = H^*(id_M) = id_{H^*(M)},$$

d.h. die lineare Abbildung f^* ist umkehrbar mit Umkehrfunktion $(f^{-1})^*$, also bijektiv und damit ein Isomorphismus

$$H^*(N) \xrightarrow{f^*} H^*(M).$$

Demnach gilt die Isomorphie $H^*(N) \cong H^*(M)$, woraus sich die Invarianz der de Rham-Kohomologie unter Diffeomorphismen ergibt. □

6 Der de Rham-Komplex einer Mannigfaltigkeit $M = U \cup V$

Unter Verwendung der *Mayer-Vietoris-Sequenz* ist es möglich, die Kohomologie der Vereinigung zweier offener Mengen zu berechnen.

6.1 Die Mayer-Vietoris-Sequenz für Ω^*

Sei also M eine Mannigfaltigkeit und $\{U, V\}$ eine offene Überdeckung von M, d.h. U, V sind zwei offene Mengen, so daß gilt

$$M = U \cup V.$$

Dann gibt es eine Sequenz von Inklusionen

$$M \longleftarrow U \coprod V \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\leftleftarrows}} U \cap V,$$

wobei $U \coprod V$ die disjunkte Vereinigung von U und V bedeutet und ∂_0 und ∂_1 die folgenden Inklusionen sind:

$$\partial_0 : U \cap V \hookrightarrow U$$
$$\partial_1 : U \cap V \hookrightarrow V.$$

Durch den kontravarianten Funktor Ω^* erhält man nun eine Sequenz von Einschränkungen

$$\Omega^*(M) \xrightarrow{\beta} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \underset{\partial_1^*}{\overset{\partial_0^*}{\rightrightarrows}} \Omega^*(U \cap V).$$

mit den Einschränkungsabbildungen

$$\partial_0^* : \Omega^*(U) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V),\ \omega \longmapsto \omega|_{U \cap V}$$
$$\partial_1^* : \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V),\ \omega \longmapsto \omega|_{U \cap V}$$

sowie

$$\beta : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V),\ \omega \longmapsto (\omega|_U, \omega|_V).$$

Definition 6.1. Die durch die Abbildung

$$\partial^* := \partial_1^* - \partial_0^* : \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V),\ (\omega, \tau) \longmapsto \partial_1^*(\tau) - \partial_0^*(\omega) = \tau|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}$$

gegebene Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\beta} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\partial^*} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

heißt **Mayer-Vietoris-Sequenz**.

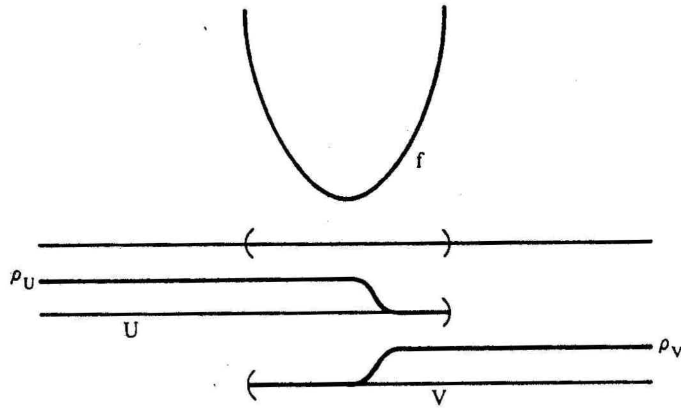
Satz 6.2. *Die Mayer-Vietoris-Sequenz ist exakt.*

Beweis. Betrachte die Exaktheit an den folgenden Stellen:

1. Exaktheit bei $\Omega^*(M)$. Exaktheit an dieser Stelle bedeutet gerade die Injektivität von β bzw. $\ker\beta = 0$. Es ist $\beta(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) = 0$ genau dann wenn die Form $\omega \in \Omega^*(M)$ sowohl auf U als auch auf V verschwindet; das bedeutet aber, daß sie auf ganz M verschwindet, also $\omega \equiv 0$ auf M. Also ist β injektiv.

2. Exaktheit bei $\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$. Die Exaktheit hier ist gleichbedeutend mit der Identität im $\beta = \ker \partial^*$.
" $\subset$ " Sei $(\omega_1, \omega_2) \in \operatorname{im}\beta$. Dann gibt es $\omega \in \Omega^*(M)$ so, daß $(\omega_1, \omega_2) = (\omega|_U, \omega|_V)$, und es gilt $\partial^*(\omega|_U, \omega|_V) = \omega|_{U\cap V} - \omega|_{U\cap V} = 0$. Also ist $(\omega_1, \omega_2) \in \ker\partial^*$.
" $\supset$ " Sei nun $(\omega, \tau) \in \ker\partial^*$: $\partial^*(\omega, \tau) = \tau|_{U\cap V} - \omega|_{U\cap V} = 0$, d.h. ω und τ stimmen auf $U \cap V$ überein. Es gibt dann eine Form $\eta \in \Omega^*(M)$ mit $\eta|_U = \omega$ und $\eta|_V = \tau$, also $\beta(\eta) = (\omega, \tau) \in \operatorname{im}\beta$.

3. Exaktheit bei $\Omega^*(U \cap V)$. Zu zeigen ist die Surjektivität von ∂^*.
Betrachte zunächst Funktionen $f \in \Omega^0(M = \mathbb{R}^1) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^1)$. Sei $\{\rho_U, \rho_V\}$ eine der offenen Überdeckung $\{U, V\}$ von $\mathbb{R}^1$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann ist $\rho_V f$ eine Funktion auf U und entsprechend $\rho_U f$ eine Funktion auf V.



Wegen
$$\partial^*(-\rho_V f, \rho_U f) = (\rho_U f) - (-\rho_V f) = f$$
kann f als Differenz einer Funktion auf V und einer Funktion auf U dargestellt werden. Das bedeutet aber, daß die Abbildung $\partial* : \Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V) \longrightarrow \Omega^0(U \cap V)$ surjektiv ist. Für eine beliebige Mannigfaltigkeit M ergibt sich analog für $\omega \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$
$$\partial^*(-\rho_V \omega, \rho_U \omega) = \omega.$$

Es folgt die Exaktheit der Mayer-Vietoris Sequenz. □

Die Mayer-Vietoris Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

induziert eine lange Sequenz von Kohomologiegruppen (auch *Mayer-Vietoris Sequenz* genannt),

$$... \longrightarrow H^q(M) \to H^q(U) \oplus H^q(V) \to H^q(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(M) \to H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V) \to ...,$$

die nach dem ***Zick-Zack-Lemma*** **(Satz 3.6)** ebenfalls exakt ist. Anhand dieser soll noch einmal die Definition des Operators d^* erläutert werden. Dazu betrachte das folgende Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & ... & & ... & & ... & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{q+2}(M) & \longrightarrow & \Omega^{q+2}(U) \oplus \Omega^{q+2}(V) & \longrightarrow & \Omega^{q+2}(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(M) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(U) \oplus \Omega^{q+1}(V) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{q}(M) & \longrightarrow & \Omega^{q}(U) \oplus \Omega^{q}(V) & \longrightarrow & \Omega^{q}(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & ... & & ... & & ... & &
\end{array}$$

Sei $\omega \in \Omega^q(U \cap V)$ eine geschlossene Form, also $d\omega = 0$. Aus Exaktheitsgründen gibt es ein $\xi \in \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ mit $\partial^*(\xi) = \omega$. Dieses ist gegeben durch $\xi = (-\rho_V\omega, \rho_U\omega)$, denn $\partial^*(\xi) = \omega$. Wegen der Kommutativität des Diagramms und der Geschlossenheit von ω gilt

$$\partial^*(d\xi) = d(\partial^*\xi) = d\omega = 0 \in \Omega^{q+1}(U \cap V),$$

wobei $d\xi = (-d(\rho_V\omega), d(\rho_U\omega))$ ist. Die Gleichheit $\partial^*(d\xi) = d(\rho_U\omega) - (-d(\rho_V\omega)) = 0$ bedeutet, daß die Formen $-d(\rho_V\omega)$ und $d(\rho_U\omega)$ auf $U \cap V$ übereinstimmen. Nun gibt es $\alpha \in \Omega^{q+1}(M)$ mit $\beta(\alpha) = d\xi$. Aus der Injektivität von β ergibt sich, daß α geschlossen ist:

$$\beta(d\alpha) = d(\beta(\alpha)) = d(d\xi) = d^2\xi = 0 \Longrightarrow d\alpha = 0.$$

Dieses α repräsentiert nun $d^*[\omega]$, also

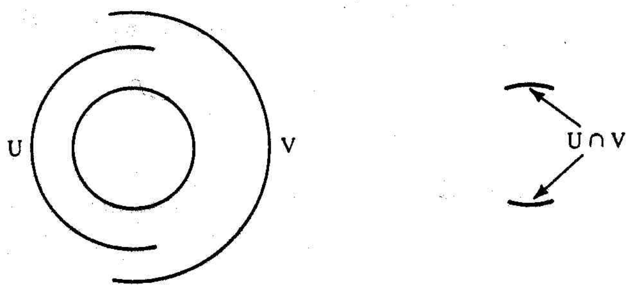
$$d^*[\omega] := [\alpha] \in H^{q+1}(M),$$

was explizit

$$d^*[\omega] = \begin{cases} [-d(\rho_V\omega)] & \text{auf U} \\ [d(\rho_U\omega)] & \text{auf V} \end{cases}$$

bedeutet. Wegen $\mathrm{supp}(\omega) \subset U \cap V$ gilt auch $\mathrm{supp}(d^*[\omega]) \subset U \cap V$.

Beispiel 6.3. (Die Kohomologie des Kreises S^1). Überdecke den Kreis S^1 durch die beiden offenen Halbkreise U und V, so daß $S^1 = U \cup V$.



Da $U, V, U \cap V$ jeweils diffeomorph zu $\mathbb{R}$ sind, erhalte mit **Lemma 5.7** die Isomorphien

$$\begin{aligned} H^2(S^1) \cong H^2(U) \oplus H^2(V) &\cong H^2(U \cap V) = 0 \\ H^1(U) \oplus H^1(V) &\cong H^1(U \cap V) = 0 \\ H^0(U) \oplus H^0(V) &\cong H^0(U \cap V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \end{aligned}$$

womit die Mayer-Vietoris-Sequenz die folgende kurze exakte Sequenz liefert:

$$0 \longrightarrow H^0(S^1) \xrightarrow{\beta^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H^1(S^1) \longrightarrow 0$$

Dabei ist die Abbildung $\delta^* := \partial^{**}$ gegeben durch

$$\delta^* : H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V), [(\omega, \tau)] \longmapsto [(\tau - \omega, \tau - \omega)],$$

womit $\dim(\mathrm{im}\ \delta^*) = 1$ ist, was nach der Dimensionsformel sofort $\dim(\ker \delta^*) = 1$ impliziert. Wegen der Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz gilt nun

$$\ker \beta^* = 0,$$

was die Injektivität von β^* bedeutet, und

$$\mathrm{im}\ \beta^* = \ker \delta^*.$$

Nun ist

$$\ker \delta^* \cong \mathbb{R},$$

denn $\ker \delta^*$ sind gerade die Kohomologieklassen konstanter Funktionen $[(\omega, \tau)] \in H^0(U) \oplus H^0(V)$ mit $\omega|_{U \cap V} = \tau|_{U \cap V}$. Die Isomorphie

$$H^0(S^1) \cong \mathrm{im}\ \beta^*$$

($H^0(S^1) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{im}\ \beta^*$ ist ja ein Isomorphismus!) liefert nun

$$H^0(S^1) \cong \ker \delta^*$$

und schließlich

$$H^0(S^1) \cong \mathbb{R}.$$

Weiter ist aus Exaktheitsgründen im $d^* = H^1(S^1)$, die Abbildung

$$d^* : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^1(S^1)$$

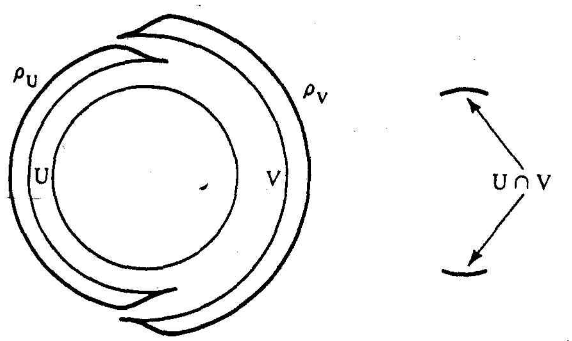
also surjektiv, und nach dem Ersten Isomorphiesatz gilt

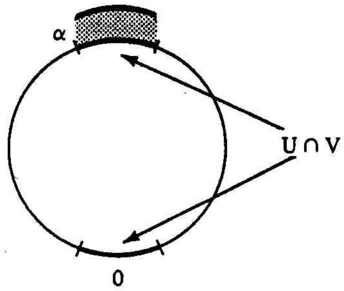
$$H^1(S^1) \cong \frac{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{\ker d^*} = \frac{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{\operatorname{im} \delta^*} = \operatorname{coker} \delta^* = \mathbb{R}.$$

Wegen $H^q(S^1) = 0$ für $q > 1$ ist damit die Kohomologie des Kreises vollständig bestimmt, nämlich ist

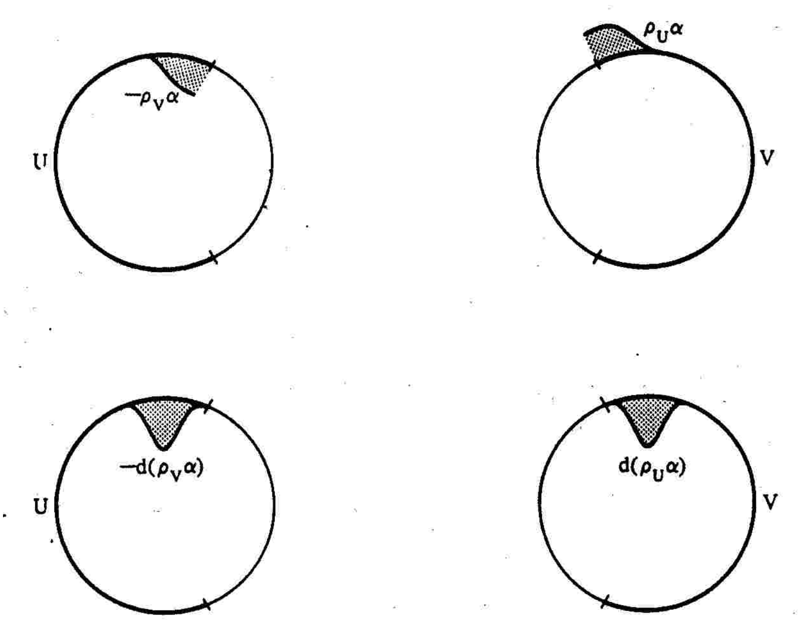
$$H^*(S^1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Ergänzung (Ein Erzeuger von $H^1(S^1)$). Sei $\alpha \in \Omega^0(U \cap V)$ eine geschlossene 0-Form mit $[\alpha] \notin \operatorname{im} \delta^*$. Dann repräsentiert $d^*[\alpha]$ einen Erzeuger von $H^1(S^1)$. Wähle für α die Funktion, die auf dem oberen Teil von $U \cap V$ den Wert 1 hat und auf dem unteren Teil 0 ist:





$[\alpha]$ ist so das Bild von $[(-\rho_V\alpha, \rho_U\alpha)]$, denn $\delta^*[(-\rho_V\alpha, \rho_U\alpha)] = [\alpha]$. Da $-d(\rho_V\alpha$ und $d(\rho_U\alpha)$ auf $U \cap V$ übereinstimmen, repräsentieren sie eine globale Form auf S^1, die durch $d^*[\alpha]$ gegeben ist. Es handelt sich dabei um eine Buckel-1-Form mit $\operatorname{supp}(d^*[\alpha]) \subset U \cap V$.



6.2 Die Mayer-Vietoris-Sequenz für Ω_c^*

Der folgende Abschnitt behandelt die Mayer-Vietoris-Sequenz für kompakte Träger, d.h. für den kovarianten Funktor Ω_c^*.

Seien wie oben M eine Mannigfaltigkeit und U, V offene Mengen, die M überdecken, also $M = U \cup V$. Ausgehend von der Sequenz von Inklusionen

$$M \longleftarrow U \coprod V \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\leftleftarrows}} U \cap V,$$

erhält man durch Anwendung des kovarianten Funktors Ω_c^* eine Sequenz von Formen mit kompaktem Träger

$$\Omega_c^*(M) \xleftarrow{\epsilon} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xleftarrow{\delta} \Omega_c^*(U \cap V),$$

wobei die Homomorphismen $\delta : \Omega_c^*(U \cap V) \to \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V)$ und $\epsilon : \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \to \Omega_c^*(M)$ definiert sind durch

$$\delta(\omega) := (-j_*\omega, j_*\omega)$$

und

$$\epsilon(\omega_1, \omega_2) := \omega_1 + \omega_2.$$

Satz 6.4. *Die Mayer-Vietoris-Sequenz für Formen mit kompaktem Träger*

$$0 \longleftarrow \Omega_c^*(M) \xleftarrow{\epsilon} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xleftarrow{\delta} \Omega_c^*(U \cap V) \longleftarrow 0$$

ist exakt.

Beweis. Untersuche die drei wesentlichen Stellen auf Exaktheit: $\square$

1. Exaktheit bei $\Omega_c^*(M)$. Es ist die Identität im $\epsilon = \Omega_c^*(M)$, d.h. die Surjektivität von ϵ zu zeigen. Sei dazu $\omega \in \Omega_c^*(M)$. Dann ist ω das Bild von $(\rho_U\omega, \rho_V\omega) \in \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V)$, denn $\epsilon(\rho_U\omega, \rho_V\omega) = \rho_U\omega + \rho_V\omega = \omega$. Da eine angeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge in einem Hausdorff-Raum stets kompakt ist, hat $\rho_U\omega$ wegen $\mathrm{supp}(\rho_U\omega) \subset \mathrm{supp}(\rho_U) \cap \mathrm{supp}(\omega)$ einen kompakten Träger. Damit folgt die Surjektivität von ϵ.

2. Exaktheit bei $\Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V)$. Zu zeigen ist dafür $\ker \epsilon = \mathrm{im}\, \delta$.
” $\subset$ ” Sei $(\omega_1, \omega_2) \in \ker \epsilon$, also $\epsilon(\omega_1, \omega_2) = 0 \in \Omega_c^*(M)$. Dann ist $\omega_1 = -\omega_2$ auf M. Somit gibt es eine Form $\omega \in \Omega_c^*(U \cap V)$ derart, daß $(\omega_1, \omega_2) = (-j_*\omega, j_*\omega)$; das bedeutet $(\omega_1, \omega_2) \in \mathrm{im}\, \delta$.
” $\supset$ ” Sei $(\omega_1, \omega_2) \in \mathrm{im}\, \delta$, dann ist $(\omega_1, \omega_2) = (-j_*\omega, j_*\omega)$ für ein geeignetes $\omega \in \Omega_c^*(U \cap V)$, und es gilt $\epsilon(\omega_1, \omega_2) = -j_*\omega + j_*\omega = 0$, also $(\omega_1, \omega_2) \in \ker \epsilon$.

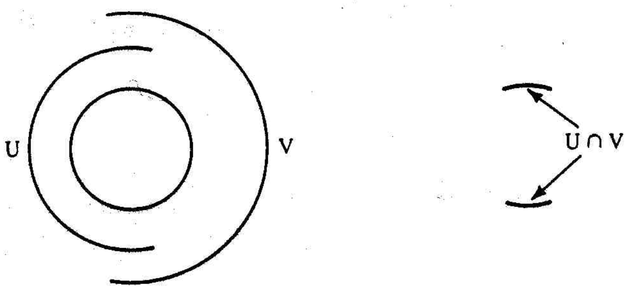
3. Exaktheit bei $\Omega_c^*(U \cap V)$. Es gilt die Injektivität von δ zu zeigen, mit anderen Worten: $\ker \delta = 0$. Dies ist leicht zu sehen, denn es gilt $\delta(\omega) = (-j_*\omega, j_*\omega) = 0$ genau dann, wenn $\omega = 0$ ist.

Es folgt die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz für Formen mit kompaktem Träger.

Wie oben liefert die Mayer-Vietoris-Sequenz eine lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen

$$\ldots \longleftarrow H_c^{q+1}(M) \leftarrow H_c^{q+1}(U) \oplus H_c^{q+1}(V) \leftarrow H_c^{q+1}(U \cap V) \xleftarrow{d^*} H_c^q(M) \leftarrow H_c^q(U) \oplus H_c^q(V) \leftarrow \ldots$$

Beispiel 6.5. (Die Kohomologie des Kreises S^1 mit kompaktem Träger). Da die Sphäre S^1 kompakt ist, ist zu erwarten, daß die Kohomologie $H_c^*(S^1)$ mit kompaktem Träger mit der gewöhnlichen de Rham-Kohomologie $H^*(S^1)$ übereinstimmt.



Mit

$$\begin{aligned} H_c^2(S^1) \cong H_c^2(U) \oplus H_c^2(V) &\cong H_c^2(U \cap V) = 0 \\ H_c^1(U) \oplus H_c^1(V) &\cong H_c^1(U \cap V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ H_c^0(U) \oplus H_c^0(V) &\cong H_c^0(U \cap V) = 0 \end{aligned}$$

erhalte aus der Mayer-Vietoris-Sequenz die exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow H_c^1(S^1) \xleftarrow{\epsilon^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xleftarrow{\delta^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xleftarrow{d^*} H_c^0(S^1) \longleftarrow 0,$$

wobei δ^* hier gegeben ist durch

$$\delta^* : H_c^1(U \cap V) \longrightarrow H_c^1(U) \oplus H_c^1(V), \ \omega = (\omega_1, \omega_2) \longmapsto (-(j_U)_*\omega, (j_V)_*\omega)$$

und j_U, j_V die Inklusionen

$$j_U : U \cap V \hookrightarrow U$$
$$j_V : U \cap V \hookrightarrow V$$

sind. Wegen der Exaktheit der Sequenz ist $\ker d^* = 0$, also ist d^* injektiv, und somit gilt

$$H_c^0(S^1) \cong \text{im } d^* = \ker \delta^*.$$

Da $\dim(\text{im } \delta^*) = 1$ ist nach der Dimensionsformel auch $\dim(\ker \delta^*) = 1$ und damit

$$H_c^0(S^1) \cong \mathbb{R}.$$

Die Exaktheit der Sequenz liefert nun die Identität im $\epsilon^* = H_c^1(S^1)$, d.h. die Surjektivität von ϵ^*. Nach dem Ersten Isomorphiesatz ist dann

$$H_c^1(S^1) \cong \frac{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{\ker \epsilon^*} = \frac{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{\text{im } \delta^*} = \text{coker } \delta^*$$

und schließlich

$$H_c^1(S^1) \cong \mathbb{R}.$$

Aufgrund der Tatsache, daß $H_c^q(S^1) = 0$ für $q > 1$ ist, ist die Kohomologie mit kompakten Trägern des Kreisen nun vollständig bestimmt, und wie erwartet gilt

$$H_c^*(S^1) = H^*(S^1) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

References

[1] Bott, Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, Juli 1997.

[2] Forster, O.: *Analysis III*. 3., durchges. Aufl.; Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1984.

[3] Jänich, K.: *Topologie*. 4. Aufl.; Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.

[4] Jänich, K.: *Vektoranalysis*. 4. Aufl.; Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.

[5] Königsberger, K.: *Analysis 2*. 3., überarb. Aufl.; Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001.

[6] Munkres, J.R.: *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing, 1984.

[7] Schick, Th.: *Differential- und Integralrechnung 3* (Kurz-Skript). WS 2003/2004, Universität Göttingen, 2003.