Kurz-Skript zu „Differential- und Integralrechnung 3“ (Lebesgue-Integral und die Integralsätze von Stokes und Gauss)

Thomas Schick*

Last compiled 31. Dezember 2003; last edited 31.12. 2003 or later

Hinweis: dieses Skript ist wurde nicht korrekturgelesen. Es gibt mit Sicherheit eine Menge Fehler. Einige davon konnten unter anderem Dank der Hinweise André Böhlkes behoben werden. Für weitere Hinweise auf Fehler schreiben Sie bitte eine email an schick@uni-math.gwdg.de. Das Skript stellt nur eine Approximation an die Vorlesung dar: Nicht alle Sätze und Beweise werden notwendigerweise vorgeführt, andererseits mögen nicht alle behandelten Sätze und Beispiele hier notiert sein.

Inhaltsverzeichnis

*email: thomas.schick@uni-math.gwdg.de

Teil I
Maß und Integration

1 Abstrakte Maß- und Integrationstheorie

1.1 Motivation. (1) Ziel: modelliere Wahrscheinlichkeiten.

Was kann das heißen? Die Möglichkeiten (für ein Experiment, etc.) werden sicher Elemente einer (großen?) Menge sein, nennen wir diese Menge Ω.

Innerhalb dieser Menge gibt es gewisse Teilmengen (nennen wir eine typische solche E), und wir interessieren uns dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit wir innerhalb dieser Teilmenge liegen.

Beispiel: Ω ist die Menge aller Geburten im Jahr 2004, und eine Teilmenge E beschreibt die Zwillingsgeburten.

Oder: Ω ist die Menge aller Pfade, die ein Öltröpfchen in Wasser von einem festen Punkt in einer Sekunde durchquert, und die Teilmenge E umfaßt all die Pfade, die am Ende mindestens eine gewisse Distanz r vom Startpunkt entfernt sind.

Die Mathematik muss uns dazu liefern: eine vernünftige Möglichkeit, die "Größe" solcher Teilmengen E auf zu messen. Was wir dazu brauchen, ist ein sogenanntes Maß.

(2) Verallgemeinerung: auf unserer Menge Ω ist eine Funktion (mit Werten in $\mathbb{R}$) gegeben, und wir wollen deren "Mittelwert" berechnen (vielleicht auch erst, nachdem wir uns auf eine Teilmenge E einschränken).

In den Bespielen könnte die Anzahl der bei der Geburt zur Welt gekommenen Kinder (Zwilling, Drilling, einzeln, ...), bzw. der Abstand nach einer Sekunde zum Anfangspunkt, die Funktion sein.

Die Mathematik wird diesen Mittelwert durch ein Integral darstellen.

(3) Statt Wahrscheinlichkeiten möchte man vielleicht nur Volumina von Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^n$) berechnen, und Mittelwerte von auf $\mathbb{R}^n$ (oder Teilmengen davon) definierten Funktionen.

Die Mathematik sollte also insbesondere ein Maß und Integral auf $\mathbb{R}^n$ bereitstellen.

In diesem Abschnitt werden wir eine abstrakte Theorie von Maß und Integration vorstellen. Wir werden eine Reihe sehr schöner Eigenschaften kennenlernen (oder wiedererkennen), die man aus einer recht kleinen Zahl von "Axiomen" herleiten kann.

Ein anderes Problem ist es, in konkreten Beispielen diese Axiome nachzuweisen. Insbesondere für den Fall des $\mathbb{R}^n$ werden wir uns damit in späteren Abschnitten beschäftigen.

1.1 Inhalte von Mengen: die Theorie

1.2 Definition. Eine *σ-Algebra* ist eine Menge Ω zusammen mit einer ausgezeichneten Kollektion $\mathfrak{M}$ (d.h. einer Teilmenge der Potenzmenge von Ω), welche folgende Eigenschaften hat:

(1) $\Omega \in \mathfrak{M}$

(2) Falls $E \in \mathfrak{M}$, dann auch $\Omega \setminus E \in \mathfrak{M}$.

(3) Für abzählbar viele Mengen $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{M}$ gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{M}.$$

Wir nennen die Mengen aus $\mathfrak{M}$ die *messbaren Mengen* von Ω.

1.3 Konvention. Falls im weiteren nicht anders angegeben, fixieren wir eine σ-Algebra $(\Omega, \mathfrak{M})$, ohne alle Daten speziell zu erwähnen.

Es ist ganz einfach, σ-Algebren zu konstruieren:

1.4 Lemma. *Sei $\mathcal{F} \subset P(\Omega)$ eine Kollektion von Teilmengen von Ω. Die von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{F}^\sigma$ ist per Definition die kleinste σ-Algebra, welche alle Mengen aus $\mathcal{F}$ enthält; anders definiert, $\mathcal{F}^\sigma$ ist der Schnitt aller σ-Algebren, welche $\mathcal{F}$ enthalten.*

Beweis. Zunächst ist die Potenzmenge selbst eine σ-Algebra. Damit gibt es $\mathcal{F}^\sigma$ wirklich, und es enthält $\mathcal{F}$.

Wir müssen beweisen, dass dieser Schnitt wirklich eine σ-Algebra ist. Seien dazu z.B. $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}^\sigma$. Sei $\mathfrak{N}$ irgend eine σ-Algebra mit $\mathcal{F} \subset \mathfrak{N}$. Nach Definition von $\mathcal{F}^\sigma$ gilt dann $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{N}$ eine σ-Algebra, also auch $\bigcup E_n \in \mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{N}$ eine beliebige σ-Algebra welche $\mathcal{F}$ enthält, gilt $\bigcup E_n \in \mathcal{F}^\sigma$, dem Schnitt aller dieser σ-Algebren.

Der Rest ergibt sich genauso. □

1.5 Definition. Sei $\mathcal{O}$ die Menge der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{O}^\sigma$ wird σ-Algebra der *Borel-Mengen* genannt. (Entsprechend für alle anderen topologichen Räume).

1.6 Lemma. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{M})$ *eine* σ*-Algebra. Dann gilt*

(1) $\emptyset \in \mathfrak{M}$

(2) $\mathfrak{M}$ *ist abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen und unter endlichen und abgeschlossenen Durchschnitten*

(3) Falls $E, F \in \mathfrak{M}$*, dann auch* $E \setminus F \in \mathfrak{M}$.

Beweis.

- $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A - 1 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$.
- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega \setminus A_n\right)$.
- $E \setminus F = E \cap (\Omega \setminus F)$.

□

1.7 Bemerkung. Hintergrund dieser Definition ist, dass man in der Regel nicht erwarten kann, dass *allen* Teilmengen einer Menge ein "vernünftiges" Mass zugeordnet werden kann; man wird sich auf eine geeignete (möglichst große) Auswahl von Teilmengen beschränken müssen.

Hier ist vor allem das Banach Tarski-Paradoxon zu nennen:

Es gibt eine disjunkte Zerlegung $D^3 = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \cup \dots \cup B_m$ und orthogonale Abbildungen $\alpha_1, \dots \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in SO_3$ so dass

$$D^3 = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^m \beta_j(B_j),$$

wobei auch diese Vereinigungen disjunkt sind.

Anschaulich: man kann einen Ball in endlich viele Stücke zerlegen, so dass man aus jeweils der Hälfte dieser Stücken durch neu zusammensetzen den alten Ball zusammen setzen kann.

Für solche Mengen (die nur mittels des Auswahlaxioms konstruiert werden können) kann keine vernünftige Masstheorie funktionieren.

1.8 Proposition. *Sei* $\mathcal{O}$ *die Menge der offenen Teilmengen von* $\mathbb{R}^n$*. Dann gilt:* $\mathcal{O}^\sigma$ *ist gleich der von den abgeschlossenen Teilmengen erzeugten* σ*-Algebra, sogar gleich der von Mengen der Form* $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ *mit* a_i, b_i *rationale Zahlen, deren Nenner nur 2-Potenzen enthält.*

1.9 Definition. Die in Proposition Borelmengen betrachteten Mengen $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ mit a_i, b_i rationale Zahlen, deren Nenner nur 2-Potenzen enthalten, werden *dyadische Rechtecke* oder *dyadische Intervalle* genannt.

Es wird im folgenden bequem sein, auch mit $+\infty$ rechnen zu können. Zur Erinnerung

1.10 Definition. $[0, \infty] := [0, \infty) \cup \{+\infty\}$, mit einer Addition, so dass $a + \infty = +\infty$ für jedes $a \in [0, \infty]$.

Der Konvergenzbegriff von Folgen/Reihen wird so erweitert, dass bestimmte Divergenz nach $+\infty$ jetzt als Konvergenz mit Limes $+\infty$ geschrieben wird.

Beachte: nun hat *jede* monoton wachsende Folge reeller Zahlen einen Grenzwerten: falls sie beschränkt ist, wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen, falls sie unbeschränkt ist, dann ist der Grenzwert nach Definition $+\infty$.

Entsprechend hat jede Reihe positiver reeller Zahlen einen Grenzwert (wieder ist $+\infty$ möglich).

1.11 Definition. Ein *Mass* auf einer σ-Algebra $(\Omega, \mathfrak{M})$ ist eine Funktion

$$\mu\colon \mathfrak{M} \to [0, \infty]$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Falls $E_1, E_2, \cdots \in \mathfrak{M}$ eine *abzählbare* Kollektion messbarer Mengen, welche paarweise disjunkt sind (also $E_k \cap E_j = \emptyset$ falls $k \neq j$), so gilt

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(2) $\mu(\emptyset) = 0$.

Die erste Eigenschaft nennt man σ-Additivität.

Eine σ-Algebra mit einem Mass wird ein *Massraum* genannt.

Falls $\mu(\Omega) = 1$, dann spricht man alternativ auch von einem Wahrscheinlichkeitsraum, die messbaren Mengen heißen Ereignisse, und μ wird Wahrscheinlichkeit genannt.

1.12 Konvention. Zu den Daten $(\Omega, \mathfrak{M})$, die weiter oben stillschweigend angenommen wurden, soll jetzt noch ein Maß μ kommen, so dass alles zusammen ein Massraum wird.

Man erhält wieder sofort einige einfache Eigenschaften:

1.13 Lemma. *(1) $A, B \in \mathfrak{M}$ mit $A \subset B$ impliziert $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(2) Falls $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ und alle $A_n \in \mathfrak{M}$, so gilt

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

(3) Falls $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ und alle $A_n \in \mathfrak{M}$, und falls $\mu(A_1) < \infty$, so gilt

$$\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Beweis. Sei $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Definiere $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ (und $B_1 := A_1$). Dann gilt $B_n \in \mathfrak{M}$ für alle n, und $B_n \cap B_m = \emptyset$ falls $n \neq m$, sowie schliesslich $A_n = B_1 \cup \cdots B_n$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Damit

$$\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_n); \qquad \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

wegen der σ-Additivität des Maßes.

Die weiteren Aussagen sind Übungsaufgabe. $\square$

1.14 Beispiel. Sei Ω eine beliebige Menge, $\mathfrak{M} = P(\Omega)$ die Potenzmenge. Definiere das *Zählmaß* auf $\mathfrak{M}$ durch

$$\mu(E) = |E|.$$

Fixiere einen Punkt $x \in \Omega$. Wir definieren das Punktmaß δ_x durch

$$\delta_x(E) := \begin{cases} 1; & x \in E \\ 0; & x \notin E. \end{cases}$$

1.15 Bemerkung. Abgesehen von diesen "primitive" Beispielen (und Varianten davon) erfordert es in der Regel sehr viel Arbeit, ein Maß zu konstruieren. Wir wollen später eines auf $\mathbb{R}^n$ konstruieren, welches allen "Quadern" das offensichtliche Maß gibt. Dies wird uns eine Weile beschäftigen.

1.2 Mittelwerte von Funktionen: erste Vorbereitung

Wichtiges Ziel der Maßtheorie ist es, Funktionen zu integrieren. Dies wird nicht für alle Funktionen möglich sein. Wir benötigen die folgende Definition.

1.16 Definition. Sei $\Omega, \mathfrak{M}$ eine σ-Algebra und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

f heißt *messbar*, falls $f^{-1}(U)$ messbar ist für jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(Die gleiche Definition benutzt man, wenn man statt $\mathbb{R}$ einen beliebigen topologischen Raum einsetzt).

Messbarkeit ist eine recht schwache Eigenschaft (die "meisten" Funktionen sind messbar), welche unter sehr vielen Konstruktionen erhalten bleibt.

1.17 Bemerkung. Erinnerung an die Mengentheorie: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist abzählbar, genauso $\mathbb{Q}^n$ für jedes n.

1.18 Lemma. *(1) Falls $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathfrak{M}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$, so ist f messbar.*

(2) Seien $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, dann auch $h\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ mit $h(x) = (f(x), g(x))$.

(3) Sei $f\colon \Omega \to X$ messbar und $\phi\colon X \to Y$ stetig, so ist $\phi \circ f\colon \Omega \to Y$ messbar (hier sind X und Y topologische Räume, z.B. $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}$.)

(4) Sind $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, so auch $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$, $1/f$ (falls $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$)

Beweis. (1) Eine beliebige offene Teilmenge U von $\mathbb{R}$ ist abzählbare Vereinigung von halboffenen Intervallen $I_n = (a_n, b_n] = (a_n, \infty) \setminus (b_n, \infty)$ mit rationalen Endpunkten a_n, b_n (man wähle für jeden Punkt $x \in U$ ein solches halboffenes Interval I_x mit $x \in I_x \subset U$, wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ gibt es insgesamt höchstens abzählbar viele solche Intervalle). Somit gilt $f^{-1}(U) = \bigcup f^{-1}(I_n)$. Weiter gilt $f^{-1}(I_n) = f^{-1}((a_n, \infty)) \setminus f^{-1}((b_n, \infty))$. Da σ-Algebra abgeschlossen unter Mengendifferenz und unter abzählbaren Vereinigungen, folgt $f^{-1}(U) \in \mathfrak{M}$.

(2) Wir wenden einen ähnlichen Trick an: jede offene Teilmenge O in $\mathbb{R}^2$ ist abzählbare Vereinigung von offenen Menge $M_n = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ (mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$), und $h^{-1}((a_1, b_1) \times (a_2, b_2)) = f^{-1}(a_1, b_1) \cap g^{-1}(a_2, b_2)$, ist also nach Voraussetzung messbar. Da $h^{-1}(O) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h^{-1}(M_n)$ ist auch $h^{-1}(O)$ messbar.

(3) ϕ stetig heißt (per Definition), dass $\phi^{-1}(O)$ offen ist für jede offene Teilmenge $O \subset Y$. Also ist $(\phi \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(\phi^{-1}(O))$ messbar für jede offene Menge O nach Definition der Messbarkeit.

(4) Da die Abbildungen $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$ und $(x, y) \mapsto xy$, sowie $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}; x \mapsto 1/x$ und $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto |x|$ stetig sind, folgt die Behauptung aus den beiden vorhergehenden Behauptungen.

$\square$

1.19 Definition. Für $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ schreibt man oft $\{f > a\}$ anstelle von $f^{-1}(a, \infty)$ (und entsprechend für andere Ungleichungen und Gleichungen). Dies wird insbesodnere in der Wahrscheinlichkeitstheorie gerne benutzt.

1.20 Definition. Für eine Teilmenge $E \subset \Omega$ ist die charakteristische Funktion $\chi_E \colon \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\chi_E(x) = \begin{cases} 1; & x \in E \\ 0; & x \notin E. \end{cases}$

1.21 Lemma. *Ist $E \subset \Omega$ messbar, so gilt $\lambda \cdot \chi_E$ ist messbar für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Falls $\lambda \neq 0$, gilt auch die Umkehrung.*

Beweis. Sei $O \subset \mathbb{R}$ offen. Es gilt $(\chi_E)^{-1}(O) \in \{\Omega, \emptyset, E, \Omega \setminus E\}$, je nachdem, ob 0, λ in O liegen oder nicht. Diese sind alle messbar. Falls $\lambda \neq 0$, kommt das Urbild E vor, also muss E messbar sein, falls $\lambda\chi_E$ messbar ist. $\square$

Es ist bequem, Funktionen mit Werten in $[-\infty, \infty]$ zu betrachten (der Wert $+\infty$ kommt ja z.B. oft als Limes vor). Wir verallgemeinern

1.22 Definition. $f \colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ heißt messbar, falls $f^{-1}((a, \infty])$ messbar ist für jedes $a \in \mathbb{R}$.

1.23 Bemerkung. Mit einer geeigneten Topologie auf $[-\infty, +\infty]$ stimmt dies mit der Definition für topologische Räume überein.

Die Eigenschaft, messbar zu sein, hängt natürlich stark von der verwendeten σ-Algebra und der verwendeten Topologie ab. In der Praxis sollen die σ-Algebren, die wir betrachten, möglichst viele Mengen enthalten, so dass möglichst viele Funktionen messbar sind.

1.24 Definition. Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to X$ messbar bezüglich der Borel σ-Algebra $\mathcal{O}^\sigma$, so heisst f *Borel-messbar.*

1.25 Beispiel. Sei $\mathcal{O}^\sigma$ die σ-Algebra der Borelmengen auf $\mathbb{R}^n$. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auch messbar für diese σ-Algebra.

Beweis. Da f stetig, ist das Urbild jeder offenen Menge offen. Per Definition enthält $\mathcal{O}^\sigma$ aber gerade alle offenen Mengen. □

Wir wollen zeigen, dass Messbarkeit wirklich eine "häufig" vorkommende Eigenschaft ist, indem wir zeigen, dass sie unter vielen weiteren Prozessen erhalten bleibt.

1.26 Proposition. *Seien $f_n\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind auch*

$$g := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n; \qquad h := \limsup_{n\to\infty} f_n$$

messbar, genauso für $\inf$ *und* $\liminf$.

Beweis.

$$g^{-1}((a,\infty]) = \{x \in \Omega \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = g(x) \in (a,\infty]\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}((a,\infty]).$$

Da $\mathfrak{M}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, gilt $g^{-1}((a,\infty]) \in \mathfrak{M}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$. Da $\inf f_n = -\sup(-f_n)$, folgt $\inf$ entsprechend.

Dann beachte, dass $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{k\geq n} f_n\}$. Aus der Messbarkeit von $\inf$ und $\sup$ folgt also die von $\limsup$ (und $\liminf$). □

1.27 Korollar. *Seien $f_n\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar und* punktweise *konvergent. Dann ist auch $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ messbar.*

Beweis. Im Fall der Konvergenz gilt $\lim = \limsup = \liminf$. □

1.3 Positive Funktionen integrieren

Unser Ziel ist nun, Funktionen, die auf einem Massraum definiert sind, zu integrieren. Wir werden uns dabei zunächst auf positive Funktionen beschränken (Vorteil: man kann zur Not den Wert $+\infty$ mit benutzen, ohne zu Widersprüchen zu kommen).

Wichtiges Prinzip soll sein: Wenn man es erst einmal geschafft hat, einen Massraum zu konstruieren (womit wir uns erst später detailliert beschäftigen werden), dann ist das Integrieren automatisch, und hat eine Reihe sehr schöner Eigenschaften.

Wie üblich, wollen wir mit elementaren Funktionen anfangen, deren Integral klar ist, und daraus durch Approximationsschritte für möglichst viele Funktionen ein Integral definieren.

1.28 Definition. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, welche nur endlich viele verschiedene Werte $(a_1, \dots, a_n)$ annimmt, wird *Treppenfunktion* genannt.

Für eine solche gilt: ist $A_j = f^{-1}(a_j)$, so ist Ω die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{j=1}^n A_j$ und $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$.

Die Treppenfunktion ist genau dann messbar, wenn A_j messbar für $j = 1, \dots, n$. In diesem Fall setzen wir:

$$\int_\Omega f := \int_\Omega f\, d\mu := \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j).$$

Wir benutzen dabei die Konvention $0 \cdot \infty = 0$, wenn $a_j = 0$ und $\mu(A_j) = +\infty$.

1.29 Definition. Sei $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ messbar. Definiere

$$\int_\Omega f\, d\mu := \sup\{\int_\Omega t\, d\mu \mid t \text{ Treppenfunktion mit } 0 \le t \le f\} \in [0,\infty].$$

Für $E \subset \Omega$ messbar definiere

$$\int_E f\, d\mu := \int_\Omega \chi_E \cdot f\, d\mu.$$

1.30 Lemma. *Für messbare Mengen und Funktionen gilt*

(1) $0 \le f \le g$ *impliziert* $0 \le \int_E f \le \int_E g$.

(2) $E \subset F$ *und* $f \ge 0$ *impliziert* $0 \le \int_E f \le \int_F f$.

(3) $\int_E cf = c \int_E f$ *für jedes* $c \in \mathbb{R}$.

(4) Ist $\mu(E) = 0$, *so gilt* $\int_E f = 0$, *sogar wenn* $f = \infty$ *auf ganz* E.

Beweis. Teilweise Übungsaufgabe.

Falls $\mu(E) = 0$, so gilt für jede Treppenfunktion t mit $0 \le t \le f$, dass $\int_E t = 0$. Dann auch (per Definition) $\int_E f = 0$. □

Wenn man erst einmal einen Maßraum hat, kann man mit Hilfe von *Dichtefunktionen* viele weitere Maße (auf derselben σ-Algebra) gewinnen:

1.31 Proposition. *Sei* $t\colon \Omega \to [0,\infty]$ *messbare Treppenfunktion. Definiere*

$$\mu_t(E) := \int_E t\, d\mu \qquad \forall E \in \mathfrak{M}.$$

Dann ist μ_t *ein Mass auf* $(\Omega, \mathfrak{M})$

Beweis. Seien $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disjunkte messbare Mengen mit Vereinigung E und $t = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$ eine messbare Treppenfunktion mit paarweise verschiedenen Werten $a_1, \dots, a_n \in [0,\infty)$.

Dann gilt $\int_{E_i} t = \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j \cap E_i)$, und somit

$$\sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} t = \sum_{j=1}^n a_j \left(\sum_{i=1}^\infty \mu(A_j \cap E_i) \right) = \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j \cap E) = \int_E t,$$

da $A_j \cap E$ die disjunkte Vereinigung der $A_j \cap E_i$.

Somit ist $\mu_t(E) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_t(E_i)$, wie zu zeigen war. □

1.32 Bemerkung. Wir werden später sehen, dass sich Proposition 1.31 auf beliebige integrierbare Funktionen ausdehnt. Es ist eine interessante Frage, inwiefern auch die Umkehrung gilt: wann kann man ein zweites Maß auf derselben σ-Algebra durch eine Dichtefunktion beschreiben. Dies wird im Satz von Radon-Nykodin beantwortet, den wir allerdings in dieser Vorlesung (aus Zeitgründen) nicht behandeln werden. Die Antwort: immer, wenn man es erwarten kann.

Unser Ziel ist nun, das Integral, welches sich *automatisch* ergibt, sobald man einen Massraum gegeben hat, genauer zu untersuchen, und zu zeigen, dass es viele gute Eigenschaften hat. Dazu brauchen wir zunächst noch ein paar vorbereitende Lemmas.

1.33 Satz. *Sei $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ messbar. Dann gibt es eine Folge t_n von messbaren Treppenfunktionen auf Ω, so dass*

(1) $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots$

(2) $\lim_{n\to\infty} t_n(x) = f(x)$ *für alle* $x \in \Omega$.

Beweis. Der Trick besteht darin, den Zielraum (also $[0,\infty]$) feiner und feiner zu unterteilen, und die Treppenfunktionen mit Hilfe der Urbildmengen zu konstruieren:

$$E_{ni} := f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})), \qquad E_n := f^{-1}[n,\infty]$$

$$t_n := \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{ni}} + n\chi_{E_n}.$$

Alle t_n sind messbare Treppenfunktionen, und Bilder zeigen, dass $0 \le t_n \le t_{n+1} \le f$.

Ausserdem gilt für $f(x) < \infty$, dass $0 \le f(x) - t_n(x) \le 2^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, und für $f(x) = \infty$, dass $t_n(x) = n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$. □

1.34 Lemma. *Seien $t, s\colon \Omega \to [0,\infty)$ Treppenfunktionen. Dann gilt*

$$\int_\Omega (t+s)\, d\mu = \int_\Omega t\, d\mu + \int_E s\, d\mu.$$

Beweis. Seien $s = \sum a_i \chi_{E_i}$ und $t = \sum b_j \chi_{F_j}$ die üblichen Zerlegungen. Setze $E_{ij} := E_i \cap F_j$. Dann gilt $s + t = \sum (a_i + b_j)\chi_{E_{ij}}$, also

$$\int s + t = \sum_{i,j} (a_i + b_j)\mu(E_{ij}) = \sum_i a_i \sum_j \mu(E_{ij}) + \sum_j b_j \sum_i \mu(E_{ij}).$$

Da $\mu(E_i) = \sum_j \mu(E_{ij})$ wegen $E_i = \bigcup E_i \cap F_j$ (disjunkte Vereinigung), und entsprechend für $\mu(F_j)$, folgt $\int s + t = \int s + \int t$. □

Die wichtigsten Eigenschaften des definierten Integrals betreffen Konvergenz-Aussagen. Wir fangen mit dem Satz über monotone Konvergenz an.

1.35 Satz. *Seien $f_n\colon \Omega \to [0,\infty]$ messbar mit $0 \le f_1 \le f_2, \ldots$. Setze $f := \lim_{n\to\infty} f_n$. Dann gilt:*
f ist messbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Beweis. Wir wissen schon, dass der Limes messbar ist, ausserdem $0 \le \int f_1 \le \int f_2 \le \cdots \le \int f$. Insbesondere $\alpha := \lim_{n\to\infty} \int f_n \le \int f$.

Um die Umgekehrte Ungleichung zu zeigen, sei t messbare Treppenfunktion mit $t \leq f$. Fixiere $0 < c < 1$, und betrachte

$$E_n := \{x \in \Omega \mid ct(x) \leq f_n(x)\}.$$

Dann gilt $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \cdots$, und $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Somit gilt für jedes n

$$\alpha \geq \int_\Omega f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} ct = c \int_{E_n} t = c\mu_t(E_n) \xrightarrow{n\to\infty} c\mu_t(\Omega) = \int_\Omega t.$$

Hier benutzen wir, dass μ_t ein Mass ist, und die Monotonie-Eigenschaft von Massen. Da $0 < c < 1$ beliebig war, folgt

$$\alpha \geq \int_\Omega t,$$

Dies gilt für jede Treppenfunktion $0 \leq t \leq f$, also auch für das Supremum, d.h. $\alpha \geq \int_\Omega f$. □

1.36 Korollar. *Seien $f_n \colon \Omega \to [0, \infty]$ messbar, $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ (Konvergenz gilt für jeden Punkt, eventuell mit Wert $+\infty$).*

Dann ist $f \colon \Omega \to [0, \infty]$ messbar und

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_i \, d\mu.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass $\int_\Omega (f_1 + f_2) = \int_\Omega f_1 + \int_\Omega f_2$. Seien dazu $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots$ und $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots$ Folgen von Treppenfunktionen mit Limes f_1 bzw. f_2. Dann ist $0 \leq s_1 + t_1 \leq s_2 + t_2 \leq \cdots$ monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit Limes $f_1 + f_2$. Nach Satz 1.35 und Lemma 1.34 gilt also

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_1 + f_2 &= \lim_{n\to\infty} \int s_n + t_n = \lim_{n\to\infty} (\int s_n + \int t_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = \int f_1 + \int f_2.\end{aligned}$$

Mit Induktion erhält man so die Additivität des Integrals für beliebige endliche Summen positiver Funktionen.

Als nächstes setze $F_n := f_1 + \cdots + f_n$. Dann gilt $F_1 \leq F_2 \leq \cdots$, alle Funktionen F_n sind messbar, und $\lim_{n\to\infty} F_n = \sum_{n=1}^\infty f_n = f$. Also, wieder mit Satz 1.35G

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int F_n = \lim_{n\to\infty} \int (f_1 + \cdots + f_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int f_k = \sum_{k=1}^\infty \int f_k.$$

□

1.4 Beliebige Funktionen integrieren

So wichtig und schön positive Funktionen (wir haben ja sogar den Wert $+\infty$ zugelassen) sind, kommen "in der Natur" natürlich auch oft Funktionen vor, die auch negative (oder gar komplexe) Werte haben, und auch hier wird man einen Mittelwert bilden wollen. Dies wird durch „Zerlegen" der zu integrierenden Funktion auf das Problem der Integration positiver Funktionen zurückgespielt.

1.37 Definition. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *messbar*, wenn sowohl ihr Realteil als auch ihr Imaginärteil messbar sind.

Beachte: für ein solches messbares f ist auch $|f| = \left|\Re(f)^2 + \Im(f)^2\right|$ messbar, da durch stetige Operationen aus $\Re(f)$ und $\Im(f)$ entstanden, messbar (Details: Übungsaufgabe).

$$\mathcal{L}^1(\Omega,\mu) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } \int_\Omega |f| \; d\mu < \infty\}.$$

Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := -\min\{0, u\}$. Definiere für eine messbare Menge E

$$\int_E f \; d\mu := \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Dies macht Sinn, denn per Definition sind $f^\pm$ nichtnegative und messbare Funktionen, ausserdem $0 \le f^\pm \le |f|$, so dass $\int f^{pm} \le \int |f| < \infty$.

(Wenn wir dies nicht hätten, würden die Differenzen keinen Sinn machen: hier sind unendliche Werte definitiv nicht erlaubt.)

Falls $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, definiere $\int f := \int \Re(f) + i \int \Im(f)$. Beachte, dass $|\Re(f)| \le |f|$ und $|\Im(f)| \le |f|$, daher sind auch $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{L}^1$.

1.38 Satz. *Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt: $\alpha f + g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und*

$$\int_\Omega (\alpha f + g) = \alpha \int_\Omega f + \int_\Omega g.$$

Beweis. Linearkombinationen messbarer Mengen sind messbar, also auch $\alpha f + g$, außerdem gilt $|\alpha f + g| \le |\alpha| \, |f| + |g|$, und somit nach Lemma 1.30 und Korollar 1.36

$$\int |\alpha f + g| \le \int |\alpha| \, |f| + |g| = |\alpha| \int |f| + \int |g| < \infty.$$

Somit $\alpha f + g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Wegen der Definition des Integrals, und indem man mehrere Schritte nacheinander ausführt, genügt es, nun Real- und Imaginärteil getrennt zu betrachten und zu zeigen:

$$\int f + g = \int f + \int g,$$

falls f, g reellwertig, sowie

$$\int \alpha f = \alpha \int f$$

für beliebige α und f.

Für die erste Frage, beachte nun $f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^- - g^-$. Also $(f+g)^+ f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$, wobei nun alle Summanden positiv und messbar sind. Hierfür wissen wir bereits mit Korollar 1.36

$$\int (f + g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f + g)^- + \int f^+ + \int g^+.$$

Nochmals umstellen liefert anhand der Definition

$$\int f + g = \int f + \int g.$$

Beachte: der Trick war hier: durch geeignetes „auf die richtige Seite bringen“ hat man es nur mit Summen (keine Differenzen) positive Funktionen zu tun.

Für die zweite Aufgabe beachte zunächst, dass wir die Formel bereits kennen, wenn $\alpha \geq 0$ (wegen Lemma 1.30). Wir betrachten nur noch den Fall $\alpha = -1$ und $\alpha = i$. Im ersten Fall wird nur die Rolle von $\Re(f)^+$ und $\Re(f)^-$ vertauscht, und die Gleichung folgt, im zweiten Fall (unter verwendung des ersten) die Rolle von $\Re(f)$ und $\Im(f)$.

Für eine beliebige komplexe Zahl α, muss man die jetzt schon bewiesen Regeln nur noch zusammensetzen, um zu erhalten, dass $\int(\alpha f) = \alpha \int f$. □

1.39 Satz. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Dann gilt*

$$\left| \int_\Omega f \right| \leq \int_\Omega |f| \, .$$

Beweis. Setze $c := \int f \in \mathbb{C}$. Falls $c = 0$: fertig. Sonst $\lambda := |c| / c$, also $|\lambda| = 1$.

Setze $u := \Re(\lambda f)$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int f \right| &= \lambda c = \lambda \int f = \int (\lambda f) \\
&= \int \Re(\lambda f) + i \int \Im(\lambda f) \overset{\text{reell}}{=} \int \Re(\lambda f) = \int u = \int u^+ - \int u^- \leq \int u^+ + \int u^- \\
&= \int |u| \leq \int |f| \, ,
\end{aligned}$$

da $|u| \leq |\lambda f| = |f|$. □

Im Gegensatz zum vorhergehenden Kapitel können wir leider nicht jeder messbaren Funktion ein Integral zuordnen (dort ging es nur mit dem Hilfsmittel, auch den Wert unendlich zuzulassen). Dies verbessert sich allerdings, wenn man nur beschränkte Funktionen über Mengen von endlichem Maß integrieren will:

1.40 Lemma. *Sei $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und $E \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(E) < \infty$. Sei die Einschränkung von f auf E beschränkt (d.h. es gibt $c > 0$, so dass $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in E$. Dann ist $f\chi_E \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, insbesondere ist*

$$\int_E f := \int f\chi_E \in \mathbb{C}$$

definiert.

Beweis. Es gilt $|f\chi_E| \leq c\chi_E$ nach Voraussetzung, somit

$$\int |f\chi_E| \leq \int c\chi_E = c\mu(E) < \infty.$$

□

Das nächste Resultat ist ein Hilfsatz, der zum Beweis des dann folgenden Konvergenzsatzes von Lebesgue gebraucht wird.

1.41 Satz. ***(Lemma von Fatou)***
Seien $f_n \colon \Omega \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \, d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Wir benutzten wieder einmal, dass $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\inf a_k \mid k \geq n\}$.

Für $x \in \Omega$ definiere $g_n(x) := \inf\{f_k(x) \mid k \geq n\}$. Somit $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. Nun gilt $g_n(x) \leq f_k(x)$ für alle $k \geq n$ (nach Definition), also $\int g_n \leq \int f_k$ für alle $k \geq n$.

Insbesondere

$$\int g_n \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \cdots$, und $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{k\to\infty} f_k$, gilt mit Satz 1.35

$$\int \liminf_{k\to\infty} f_k = \lim_{n\to\infty} \int g_n \leq \int \liminf_{k\to\infty} f_k.$$

□

Den folgenden Beweis haben wir fast identisch schon am Ende von Diff 2 gesehen. Die Aussage ist von fundamentaler Bedeutung: es handelt sich um eine äußert allgemeines Prinzip zur Vertauschung von Integration und Grenzwert. Da in der Analysis ständig mit Grenzwerten gearbeitet wird, ist dies außerordentlich nützlich.

1.42 Satz. ***(Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz)***
Seien $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ messbare Funktionen, welche punktweise gegen die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ konvergieren

Es existiere $g\colon \Omega \to [0,\infty]$ mit $\int_\Omega g < \infty$ so dass

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \Omega.$$

Dann gilt: $f, f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n| \; d\mu = 0, \qquad , \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \; d\mu - \int_\Omega f \; d\mu.$$

be

Beweis. f ist messbar als Grenzwert messbarer Funktionen, damit ist auch $|f|$ messbar. Ausserdem gilt $|f_n| \leq g$, $|f| \leq g$, somit $\int_\Omega |f_n| \leq \int_\Omega g < \infty$, und $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$.

Es gilt $|f - f_n| \leq 2g$, und $2g - |f - f_n| \xrightarrow{n\to\infty} 2g$. Damit

$$\int (\liminf_{n\to\infty}(2g - |f - f_n|)) \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int 2g - |f - f_n|$$
$$= \int 2g - \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n|}_{\geq 0}.$$

Die Ungleichung kann nur erfüllt sein, wenn $\limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n| = 0$. Da alle Terme ≥ 0, haben wir sogar echte Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} |f - f_n| \; d\mu = 0.$$

Die zweite Aussage folgt schnell aus der ersten:

$$\left|\int f_n - \int f\right| = \left|\int (f_n - f)\right| \leq \int |f_n - f| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

somit $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$. □

1.5 $\mathcal{L}^p$-Funktionen und einige Ungleichungen

Wofür steht die 1 in $\mathcal{L}^1$.

1.43 Definition. Für $1 \le p < \infty$ setze

$$\mathcal{L}^p(\Omega,\mu) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } \int |f|^p < \infty\}.$$

Für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ definiere die L^p-Halbnorm

$$|f|_p := (\int |f|^p)^{1/p} \in [0,\infty)$$

(dies ist nur eine Halbnorm, da $|f|_p = 0$ nicht impliziert, dass $f = 0$).

Diese Räume spielen in der Theorie der Differentialgleichung eine wichtige Rolle, auch in der Funktionalanalysis.

Der Fall $p = 2$ ist von besonderer Bedeutung. Insbesondere in der Quantenphysik werden die möglichen Zustände eines Systems (Atom etc.) durch Elemente in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ beschrieben.

Den Fall $p = \infty$ kann man auch betrachten:

1.44 Definition. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Wir definieren: $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu)$ genau dann wenn es eine messbare Menge $N \subset \Omega$ und ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|f(x)| \le k$ für alle $x \in \Omega \setminus N$.

Definiere $|f|_\infty := \inf\{k \in \mathbb{R} \mid k \text{ Schranke wie oben}\}$.

$|f|_\infty$ heißt das *wesentliche Supremum* von f: vom Gesichtspunkt der Maß- und Integrationstheorie spielen Mengen N mit $\mu(N) = 0$ keine Rolle.

1.45 Lemma. *Sei $1 \le p \le \infty$.*

(1) $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(2) $|\alpha f|_p = |\alpha| \cdot |f|_p$ für alle $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $p < \infty$. Für $a, b \in \mathbb{C}$ ist

$$|a+b|^p \le (|a| + |b|)^p \le (2\max\{|a|, |b|\})^p = 2^p(\max\{|a|^p, |b|^p\}) \le 2^p(|a|^p + |b|^p). \tag{1.46}$$

Falls $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, so gilt zunächst $\alpha f + g$ messbar, und weiter indem man Ungleichung (1.46) punktweise ausnutzt

$$\int |\alpha f + g|^p \le \int 2^p(|\alpha|^p |f|^p + |g|^p) = 2^p |\alpha|^p \int |f|^p + 2^p \int |g|^p < \infty.$$

Der Fall $p = \infty$ wird später behandelt. □

1.47 Beispiel. Sei nun speziell $\Omega = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{M}$ die Potenzmenge von $\mathbb{Z}$ und μ das Zählmaß. In diesem Fall schreiben wir

$$l^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{Z}).$$

Diese Konstruktion ist sogar interessant, wenn $\mathbb{Z}$ durch eine endliche Menge E (auch hier mit Zählmaß) ersetzt wird. Der zugehörige $\mathcal{L}^p(E)$ ist dann isomorph zum endlich dimensionalen Vektorraum $\mathbb{C}^{|E|}$, mit verschiedenen, uns teilweise schon bekannten Normen.

Wir haben also jetzt einen Vektorraum konstruiert, auf dem so etwas ähnliches wie eine Norm definiert werden kann. Im folgenden wollen wir für diese Norm die Dreiecksungleichung und einige weitere Ungleichungen beweisen. Diese sind auch schon für l^p und $\mathcal{L}^p(E)$ für endliche Mengen E von großem Interesse.

1.48 Lemma. *Für $a, b \geq 0$ und $0 < t < 1$ gilt*

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b.$$

Beweis. Diese harmlose Ungleichung zwischen reellen Zahlen (aber mit weitreichenden Konsequenzen) wird mit einem Trick bewiesen.

Betrachte die Funktion $f(x) := 1 - t + tx - x^t$ $(x > 0)$. Dann gilt

$$f'(x) = t - tx^{t-1} = t(1 - x^{t-1}) \begin{cases} < 0; & 0 < x < 1 \\ = 0; & x = 1 \\ > 0; & x > 1 \end{cases}$$

Die Ungleichungen gelten, da $0 < t < 1$.

f ist also monoton fallend für $0 < x < 1$, hat sein (globales) Minimum an $x = 1$, und ist streng monoton wachsend für $x > 1$. Insbesondere gilt für jedes $x > 0$

$$f(x) \geq f(1) = 1 - t + t - 1 = 0.$$

Für $a, b > 0$ setze $x := a/b$. Dann gilt also

$$0 \leq f(\frac{a}{b}) = 1 - t + t\frac{a}{b} - \frac{a^t}{b^t},$$

somit (nach multiplikation mit $b > 0$)

$$0 \leq (1-t)b + ta - a^t b^{1-t}.$$

Falls $a = 0$ oder $b = 0$, ist die Aussage klar. □

1.49 Satz. ***(Hölder-Ungleichung)***
Seien $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (Dann heißen p und q duale Exponenten*).*

Insbesondere: wenn $p = 1$, dann $q = \infty$ und wenn $p = 2$ dann $q = 2$.

Seien $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$. Dann gilt

$$fg \in \mathcal{L}^1(\Omega); \qquad |fg|_1 \leq |f|_p \, |g|_q \, .$$

Beweis. Sei $1 < p < \infty$ (dann auch $1 < q < \infty$) und $|f|_p > 0$, $|g|_q > 0$.

Fixiere $x \in \Omega$ und setze $t := 1/p$, $a := |f(x)|^p \,/\, |f|_p^p$, $b := |g(x)|^p \,/\, |g|_q^p$. Dann gilt wegen Lemma 1.48

$$\frac{|f(x)|}{|f|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{|g|_q} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b.$$

Also, indem man integriert

$$\frac{\int |fg| \; d\mu}{|f|_p \, |g|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{\int |f|^p \; d\mu}{|f|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int |g|^q \; d\mu}{|g|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Also $\int |fg| \; d\mu \leq |f|_p \, |g|_q < \infty$.

Die Fälle $|f|_p = 0$ oder $|g|_q = 0$ oder $p \in \{1, \infty\}$ wird später behandelt. □

1.50 Bemerkung. Die $\mathcal{L}^p$-Räume sind insbesondere wichtig, wenn Funktionen multipliziert werden sollen. Grund dafür ist gerade die Hölder-Ungleichung.

1.51 Satz. ***(Minkowski-Ungleichung)***
Sei $1 \le p \le \infty$*,* $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$*. Dann gilt*

$$|f+g|_p \le |f|_p + |g|_p .$$

Beweis. $p = 1$: $|f+g|_1 = \int |f+t| \ d\mu \le \int |f| + |g| \ d\mu = |f|_1 + |g|_1$.

Sei $1 < p < \infty$. Wähle q mit $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt $p + q = pq$, also $p = (p-1)q$.

Somit $(|f+g|^{p-1})^q = |f+g|^p \in \mathcal{L}^1$, und $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$.

Die Minkowski-Ungleichung impliziert, dass $|f|\,|f+g|^{p-1}, |g|\,|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^1$ und

$$\begin{aligned}|f+g|_p^p &= \left| |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \right|_1 \le \left| |f| \cdot |f+g|^{p-1} \right|_1 + \left| |g| \cdot |f+g|^{p-1} \right|_1 \\ &\le |f|_p \left| |f+g|^{p-1} \right|_q + |g|_p \left| |f+g|^{p-1} \right|_q\end{aligned}$$

Beachte nun, dass $\left| |f+g|^{p-1} \right|_q = \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = |f+g|_p^{p/q}$. Falls $|f+g|_p \neq 0$, dividiere durch $|f+g|_p^{p/q}$. Dann erhält man

$$|f+g|_p^{p-p/q} = |f+g|_p \le |f|_p + |g|_p .$$

Falls $|f+g|_p = 0$, ist die Ungleichung sowieso korrekt.

Der Fall $p = \infty$ wird später behandelt. □

Wir werden später sehen, wie man aus $\mathcal{L}^p$ einen normierten Vektorraum macht, und zeigen, dass dieser sogar immer vollständig ist.

1.6 Konstruktion von Maßen im allgemeinen

Die bisherigen Anstrengungen zeigen, dass man, sobald man einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ hat, völlig automatisch eine befriedigende Integrationstheorie erhält.

Unser Fernziel ist, einen solchen Maßraum zu konstruieren, bei dem $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{M} \supset \mathcal{O}$, d.h. mindestens jede offene Menge soll messbar sein. In diesem Fall sind auch alle stetigen Funktionen messbar, also nahe daran, integrierbar zu sein, vergleiche z.B. Lemma 1.40.

Zunächst wollen wir eine allgemeine „Maschine" bauen, die aus einer kleineren Anzahl von Zutaten einen Maßraum konstruiert. Dies ist nahezu die einzige Möglichkeit, wie in der Praxis Maßräume entstehen, und sie wird dann auch auf den $\mathbb{R}^n$ angewendet werden.

Zunächst definieren wir, was wir an „Zutaten" benutzen wollen:

1.52 Definition. Eine (maßtheoretische) *Algebra* ist eine Menge Ω zusammen mit einer Kollektion von Teilmengen R, so dass

(1) $\emptyset \in R$

(2) R ist abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen

(3) Falls $A \in R$, dann auch $\Omega \setminus A \in R$.

Der Unterschied zu einer σ-Algebra besteht also darin, dass wir uns nur um endliche, nicht aber um abzählbare Vereinigungen kümmern müssen. Insbesondere folgt wie vorher:

1.53 Lemma. *Eine Algebra R ist abgeschlossen und endlichen Durchschnitten.*

1.54 Definition. Ein *Prämaß* auf einer maßtheoretischen Algebra (Ω, R) ist eine Funktion $\mu\colon R \to [0, \infty]$, so dass gilt $\mu(\emptyset) = 0$ und für endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in R$ gilt

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

μ heißt *σ-additives Prämaß*, wenn für jede abzählbare disjunkte Familie $A_1, A_2, \dots \in R$, für die außerdem (ausnahmsweise) gilt, dass $A := \bigcup A_n \in R$, erfüllt ist, dass

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Der Unterschied zwischen Prämaß und Maß liegt hier wieder darin, dass man nur endliche, und nicht beliebige Vereinigungen kontrollieren muss. Beim σ-additiven Prämaß muss man sich nur um die abzählbaren disjunkten Vereinigungen kümmern, deren Vereinigung auch wirklich zu R gehört. Dies ist ja nicht zwingend vorgeschrieben (wenn es keine einzige solche disjunkte abzählbare Zerlegung in R gibt, ist ein Prämaß automatisch σ-additiv).

Es ist im allgemeinen immer noch schwierig genug, eine Algebra mit einem Prämaß zu konstruieren. Dazu wird man versuchen, eine Algebra zu konstruieren, deren Elemente aus "einfachen" Bausteinen zusammengesetzt sind, für die man ein Maß definieren kann. Auch dies kann man axiomatisieren, wir werden dies nicht tun, sondern am Beispiel des $\mathbb{R}^n$ sehen, wie man (in manchen Fällen) vorgehen kann.

Bisher gingen wir bei unseren "Zutaten" so vor, die Bedingungen an einen Maßraum abzuschwächen, indem weniger Mengen messbar sein mussten (nicht jede abzählbare Vereinigung von Mengen aus R liegt in R).

Im Kontrast dazu kann man auch die Zerlegungs-Gleichung abschwächen, dafür aber alle Teilmengen zulassen:

1.55 Definition. Sei Ω eine Menge. Eine Funktion $\tilde{\mu}\colon P(\Omega) \to [0, \infty]$ heißt *äusseres* Maß, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(1) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$.

(2) Falls $A \subset B$, so gilt $\tilde{\mu}(A) \le \tilde{\mu}(B)$.

(3) Für abzählbar viele Mengen $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ gilt

$$\tilde{\mu}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_n).$$

1.56 Satz. *Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum. Dann definiert*

$$\tilde{\mu}(E) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A_1, A_2, \dots \in R \text{ und } E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\}$$

ein äußeres Maß auf Ω, mit $\tilde{\mu}(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in R$.

Beweis. Für $A \in R$ ist $\mu(A)$ eine der Zahlen, deren Infimum genommen werden muss, also $\tilde{\mu}(A) \leq \mu(A)$. Insbesondere gilt $\tilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Ist $A \subset B$, so ist $\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(B)$, da jede Überdeckung von B auch eine von A ist, und so die Menge der Werte, deren Infimum $\tilde{\mu}(A)$ ergibt, größer (oder gleich) der entsprechenden Menge für $\tilde{\mu}(B)$ ist.

Es bleibt die Ungleichung in der Definition des äußeren Maßes. Seien also $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$. Seien $F_{i,j} \in R$, so das $A_i \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_{i,j}$. Somit $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} F_{i,j}$. Per Definition gilt somit

$$\tilde{\mu}(A) \leq \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \mu(F_{i,j}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(F_{i,j}).$$

Bilden wir nun das Infimum über alle möglichen solchen Familien $(F_{i,j})$, so ergeben sich auf der rechten Seite gerade die $\tilde{\mu}(A_i)$, somit

$$\tilde{\mu}(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i).$$

$\square$

1.57 Definition. Sei $\Omega, \tilde{\mu}$ eine Menge mit einem äußeren Maß. Setze

$$\mathfrak{M}_{\tilde{\mu}} := \{A \subset \Omega \mid \tilde{\mu}(S) = \tilde{\mu}(S \cap A) + \tilde{\mu}(S \cap (\Omega \setminus A)) \quad \forall S \subset \Omega\}.$$

1.58 Satz. *Sei $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß auf Ω. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{M}_{\tilde{\mu}})$ zusammen mit der Einschränkung von $\tilde{\mu}$ auf $\mathfrak{M}_{\tilde{\mu}}$ ein Maßraum.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathfrak{M}_{\tilde{\mu}}$ eine σ-Algebra ist.

Falls $A \in \mathfrak{M}_{\tilde{\mu}}$, dann wegen der Symmetrie der Definition auch $\Omega \setminus A$.

Falls $A, B \in \mathfrak{M}_{\tilde{\mu}}$ (wir betrachten zuerst endliche Vereinigungen). Sei $S \subset \Omega$ beliebig.

Wir benutzen folgende Schreibweise und Fakten:

- Für $X \subset \Omega$ ist $X^c = \Omega \setminus X$.
- Es gilt $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$.
- Es gilt $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z) = (X \cap Z) \cup (X^c \cap Y \cap Z)$
- Es gilt $(X_1 \cup X_2 \cup \cdots)^c = X_1^c \cap X_2^c \cap \cdots$.

Nun gilt (die Eigenschaften des äußeren Maßes ausnutzend)

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(S) \leq & \tilde{\mu}((A \cup B) \cap S) + \tilde{\mu}((A \cup B)^c \cap S) = \tilde{\mu}((A \cup B) \cap S) + \tilde{\mu}(A^c \cap B^c \cap S) \\ \leq & \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A^c \cap B \cap S) + \tilde{\mu}(A^c \cap B^c \cap S) = \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A^c \cap S) \\ = & \tilde{\mu}(S).\end{aligned}$$

Seien nun $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{M}_{\tilde\mu}$ abzählbar viele Menge. Wir müssen zeigen, dass ihre Vereinigung A auch in $\mathfrak{M}_{\tilde\mu}$ liegt.

Sei dazu wieder $S \subset \Omega$ beliebig. Dann gilt

$$\tilde\mu(S) \le \tilde\mu(S\cap A) + \tilde\mu(S\cap A^c) = \tilde\mu(S\cap A) + \tilde\mu(S\cap A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots).$$

Wir zerlegen jetzt wieder $S \cap A$ disjunkt:

$$S\cap A = (S\cap A_1)\cup(S\cap A_2\cap A_1^c)\cup(S\cap A_3\cap A_2^c\cap A_1^c)\cup\cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty}(S\cap A_i\cap\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j^c).$$

Dasselbe geht natürlich auch, wenn man statt A die Menge $B_n = A_1\cup\cdots\cup A_n$ betrachtet. Dann, indem man induktiv die Rechnung von oben anwendet:

$$\begin{aligned}\tilde\mu(S) =&\tilde\mu(S\cap A_1^c\cap\cdots\cap A_n^c) + \tilde\mu(S\cap A_1^c\cap\cdots\cap A_{n-1}^c\cap A_n) + \tilde\mu(S\cap A_1^c\cap\cdots\cap A_{n-2}^c\cap A_{n-1}) + \cdots\\ =&\tilde\mu(S\cap B_n^c) + \sum_{i=1}^{n}\tilde\mu(S\cap A_i\cap\bigcap_{j=1}^{i-1}A_j^c)\\ \ge&\tilde\mu(S\cap A^c) + \sum_{i=1}^{n}\tilde\mu(S\cap A_i\cap\bigcap_{j=1}^{i-1}A_j^c)\end{aligned}$$

Dies gilt für alle n, also auch für den Limes $(\sum_{i=1}^{\infty})$.

Somit

$$\begin{aligned}\tilde\mu(S) \le&\tilde\mu(S\cap A^c) + \tilde\mu(S\cap A)\\ \le&\tilde\mu(S\cap A^c) + \sum_{i=1}^{\infty}\tilde\mu(S\cap A_i\cap\bigcap_{j=1}^{i-1}A_j^c) \le \tilde\mu(S).\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\mathfrak{M}_{\tilde\mu}$ eine σ-Algebra ist. Wir müssen noch zeigen, dass $\tilde\mu$ hier σ-additiv ist. Sei dazu $A_n \in \mathfrak{M}_{\tilde\mu}$ eine abzählbare Kollektion paarweise disjunkter Mengen, und wieder $B_n = A_1\cup\cdots\cup A_n$.

Wir zeigen zunächst die endliche Additivität: Mit $S = A_1 \cup A_2$ erhält man aus der Definition von $\mathfrak{M}_{\tilde\mu}$

$$\mu(A_1\cup A_2) = \mu(A_1\cap(A_1\cup A_2)) + \mu(A_1^c\cap(A_1\cup A_2)) = \mu(A_1)+\mu(A_2).$$

Induktiv ergibt sich endliche Additivität.

Wegen Monotonie gilt $\mu(A) \ge \mu(B_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. Die Ungleichung gilt also auch für den Limes $(n\to\infty)$, somit

$$\mu(A) \ge \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \ge \mu(A),$$

wobei wir nochmal die Eigenschaften des äußeren Maßes benutzen. □

1.59 Satz. *Sei (Ω, R, μ) ein σ-additiver Prämaßraum. Dann besitzt μ eine Fortsetzung zu einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{M}_{\tilde\mu}, \tilde\mu)$, d.h. $R \subset \mathfrak{M}_{\tilde\mu}$ und $\tilde\mu|_R = \mu$.*

Falls Ω die disjunkte Vereinigung von abzählbar *vielen messbaren Mengen mit endlichem Maß ist (d.h. Ω ist σ-endlich), dann ist diese Fortsetzung eindeutig. Damit ist gemeint, dass, falls $\mathcal{N}$ σ-Algebra mit $R\subset\mathcal{N}\subset\mathfrak{M}_{\tilde\mu}$ und ist μ' ein Maß auf $\mathcal{N}$ mit $\mu'|_R = \mu$, dann gilt $\mu' = \tilde\mu|_{\mathcal{N}}$.*

Beweis. Nach Satz 1.58 ist ja tatsächlich $(\Omega, \mathfrak{M}_{\tilde{\mu}}, \tilde{\mu})$ ein Maßraum. Wir müssen noch zeigen, dass $R^\sigma \subset \mathfrak{M}_{\tilde{\mu}}$, und dass für $A \in R$ gilt

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A),$$

damit wir wirklich eine *Fortsetzung* des gegebenen Maßes erhalten.

Da R^σ die kleinste σ-Algebra ist, die R enthält, müssen wir für die erste Behauptung nur zeigen, dass $R \subset \mathfrak{M}_{\tilde{\mu}}$. Sei also $A \in R$. Wegen der Definition von $\tilde{\mu}$ wähle $T \subset \Omega$ und abzählbar viele $B_i \in R$ so dass $T \subset \bigcup B_i$. Da μ ein Prämaß ist, gilt $\mu(B_i) = \mu(B_i \cap A) + \mu(B_i \cap A^c)$. Somit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i \cap A) + \mu(B_i \cap A^c).$$

Wir bilden nun das Infimum über alle solchen Familien von Mengen B_i. Nach Definition ergibt die linke Seite $\tilde{\mu}(T)$, die rechte Seite ist zumindest $\geq \tilde{\mu}(T \cap A) + \tilde{\mu}(T \cap A^c)$ (wir betrachten Überdeckungen von $T \cap A$ der vorgeschriebenen Art, aber möglicherweise nicht alle, die wir für das Infimum betrachten müssen). Also

$$\tilde{\mu}(T) \geq \tilde{\mu}(T \cap A) + \tilde{\mu}(T \cap A^c) \geq \tilde{\mu}(T),$$

wobei die zweite Ungleichung gilt, da wir nach Satz 1.56 bereits wissen, dass $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß ist. Da T beliebig war, gilt $A \in \mathfrak{M}_{\tilde{\mu}}$.

Wir wissen bereits dass $\tilde{\mu}(A) \leq \mu(A)$ für $A \in R$. Wähle eine beliebige abzählbare Kollektion $B_i \in R$ mit $A \subset B_i$. Definiere $C_n := B_n \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c$. Dann gilt immer noch $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ (wir machen die Mengen disjunkt). Da R eine maßtheoretische Algebra ist, gilt $A \cap C_n \in R$. Weiter, wegen σ-Additivität von μ und Monotonie

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cup C_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

Da die Überdeckung B_i beliebig war, gilt die Ungleichung auch für das Infimum, also

$$\mu(A) \leq \tilde{\mu}(A),$$

wie noch zu zeigen war.

Es bleibt noch die Eindeutigkeitsaussage zu zeigen.

Sei $A \in \mathcal{N}$, so dass $B \in R$ existiert mit $A \subset B$ und $\mu(B) < \infty$. Seien $A_i \in R$ mit $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Dann gilt

$$\mu'(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu'(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Nach Definition des äußeren Masses (Übergang zum Infimum auf der rechten Seite)

$$\mu'(A) \leq \tilde{\mu}(A).$$

Genauso gilt $\mu'(B \setminus A) \leq \tilde{\mu}(B \setminus A)$. Wegen der Additivität ist nun aber (und da $B \in R$)

$$\mu'(B) + \mu'(B \setminus A) = \mu(B) = \tilde{\mu}(B) + \tilde{\mu}(B \setminus A).$$

Wir wissen bereits, dass jeder Summand links nicht größer als der entsprechende Summand rechts ist. Es folgt $\mu'(B) = \tilde{\mu}(B)$.

Für beliebiges $B \in \mathcal{N}$ benutzen wir nun, dass Ω σ-endich ist, also $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ mit $S_i \in R$ paarweise disjunkt und $\mu(S_i) < \infty$. Dann gilt

$$\mu'(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(B \cap S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B \cap S_i) = \tilde{\mu}(B).$$

□

2 Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$

Jetzt haben wir alle Mittel bereit, das schon in Diff 2 benutzte Lebesgue-Integral für Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ zu konstruieren.

Nach dem, was wir bisher erarbeitet haben, müssen wir dazu nur eine geeignete maßtheoretische Algebra auf $\mathbb{R}^n$ definieren, zusammen mit einem σ-additiven Prämaß, und erhalten dann automatisch ein Maß und den zugehörigen Integralbegriff.

Wir wollen sicherstellen, dass unser erzeugter Maßraum alle offenen Mengen enthält, um (im wesentlichen alle) stetigen Funktionen integrieren zu können. Natürlich muss das Maß mit dem "gewohnten" Maß auf elementaren Mengen, wie Intervallen, Rechtecken und deren höher-dimensionalen Analoga, übereinstimmen.

Wir beginnen mit ein paar ganz simplen Algebren:

2.1 Definition. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^m$ gehört zur dyadische Algebra D_n genau dann, wenn sie endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$E^n_{k_1,\dots,k_m} := [\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}) \times [\frac{k_2}{2^n}, \frac{k_2+1}{2^n}) \times \cdots \times [\frac{k_m}{2^n}, \frac{k_m+1}{2^n}); \quad -n2^n \le k_i \le n2^n - 1$$

oder ihrer Komplemente ist.

Beachte, dass es überhaupt nur endlich viele solcher Mengen gibt. Es handelt sich hier also sogar um eine σ-Algebra.

Wir definieren ein Maß auf D_n, indem wir für jeden elementaren Würfel das Maß $\mu(E^n_{k_1,\dots,k_m}) := 2^{-nm}$ zuordnen, einer endlichen (disjunkten) Vereinigung von solchen die entsprechende Summe, und einem Komplement (notwendigerweise unbeschränkt) das Maß $+\infty$.

2.2 Lemma. *$D_n \subset D_{n+1}$, und das in Definition 2.1 konstruierte Maß von D_{n+1} schränkt sich auf dasjenige von D_n ein.*

Beweis. Jeder elementare Würfel E^n in D_n ist disjunkte Vereinigung von genau 2^m elementaren Würfeln $E_1^{n+1}, \dots, E_m^{n+1}$ in D_{n+1} (diese erhält man durch halbieren aller Seiten aus dem elementaren Würfel in D_n).

Insbesondere $\mu(E^n) = 2^{-nm} = 2^m 2^{-m(n+1)} = \sum_{j=1}^m \mu(E_1^{n+1}) + \cdots + \mu(E_M^{n+1})$. □

2.3 Definition. Setze $D_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, mit Maß μ wie in Definition 2.1 —dies ist wohldefiniert wegen Lemma 2.2.

Ehe wir zeigen, dass μ ein σ-additives Prämaß auf D_∞ ist, müssen wir noch ein paar elementare Eigenschaften von Prämaßen herleiten:

2.4 Lemma. *Sei (R, μ) ein Prämaßraum. Dann gilt*

(1) Falls $A, B \in R$ mit $A \subset B$, so $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(2) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

(3) Sind $A_i \in R$ paarweise disjunkt, $A \in R$ mit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subset A$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu(A).$$

Beweis. Übungsaufgabe □

2.5 Lemma. *$(\mathbb{R}^m, D_\infty, \mu)$ ist ein σ-additiver Prämaßraum.*

Beweis. $\emptyset \in D_\infty$. Seien $A_1, A_2 \in D_\infty$. Dann gibt es ein n, so dass $A_1, A_2 \in D_n$. Da D_n eine σ-Algebra, aslo $A_1 \cup A_2 \in D_n \subset D_\infty$ und $\mathbb{R}^n \setminus A_1 \in D_n \subset D_\infty$.

Da $\mu|_{D_n}$ ein Maß ist, folgt auf die gleiche Weise, dass μ auf D_∞ endlich-additiv ist, also ein Prämäß definiert. Es macht etwas mehr Mühe, zu zeigen, dass dieses Prämaß σ-additiv ist. Sei also dazu $A \in D_\infty$ Vereinigung von abzählbar vielen paarweise disjunkten Menge $A_i \in A_\infty$.

Dann gibt es ein $n, n_i \in \mathbb{N}$ so dass $A \in D_n$ und $A_i \in D_{n_i}$. Wähle $n_i \geq n$ (geht, da $D_k \subset D_{k+1}$). Sei zunächst $\mu(A) < \infty$. A ist dann Vereiningung von endlich vielen vielen elementaren Würfeln $E_j^n \in D_n$. Betrachte für einen solchen Würfel $B_i := A_i \cap E_j^n$. Dann ist E_j^n die disjunkte Vereinigung der B_i, und es gilt $B_i \in D_{n_i}$.

Es genügt, zu zeigen, dass $\mu(E_j^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$, die Aussage für A ergibt sich dann, indem man diese endlich vielen Gleichungen aufsummiert (und benutzt, dass μ ein Prämaß ist). Sei $E_j^n = [a^1, b^1) \times \cdots \times [a^m, b^m)$.

Jedes der $A_i \cap E_j^n$ ist endliche disjunkte Vereinigung von elementaren Würfeln. Wir können also annehmen (indem wir ggf. die B_i entsprechend zerlegen), dass alle B_i selbst schon elementare Würfel sind.

Entscheidender Schritt: fixiere $r \in \mathbb{N}$. Wir vergrößern jetzt den i-ten Würfel $B_i = [a_i^1, b_i^1) \times \cdots \times [a_i^m, b_i^m)$ zu $A_i' := [a_i^1, b_i^1 + \epsilon_i) \times \cdots \times [a_i^m, b_i^m + \epsilon_i)$, wobei $\epsilon_i = 2^{-i} \cdot 2^{-r}$. A_i' gehört dann ebenfalls zu D_∞, und

$$\mu(A_i') \leq \mu(B_i) + 2^{-i} 2^{-r} 2^m \cdot m.$$

Verkleinere entsprechend E_j^n zu $E' := [a^1, b^1 - 2^{-r}) \times \cdots \times [a^m, b^m - 2^{-r})$, dann gilt ähnlich wie eben

$$\mu(E') \geq \mu(E_j^n) - 2^{-r} 2^m m.$$

Das Innere $(A_i')^\circ$ von A_i' enthält immer noch B_i ($A_i \subset (A_i')^\circ$), und $\overline{E'} \subset E_j^n$, wobei $\overline{E'}$ der Abschluss von E'.

Damit überdecken die $(A_i')^\circ$ die abgeschlossene und beschränkte, daher kompakte Menge $\overline{E'}$.

Kompaktheit impliziert, dass schon endlich viele, etwa $A_1', \ldots, A_k'$ die Menge E' überdecken.

Die endliche Additivität des Prämaßes impliziert

$$\mu(E') \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i').$$

Mit den Abschätzungen von oben:

$$\mu(E) \leq \mu(E') + 2^{-r}m2^m \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i') \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) - 2^{-r}m2^m.$$

Da m (die Dimension des euklidischen Raums) fest ist, aber $r \in \mathbb{N}$ beliebig, folgt daraus

$$\mu(E_j^n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

Nach Lemma 2.4 gilt die umgekehrte Ungleichung, also

$$\mu(E_j^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

Beachte: im Beweis wurde kompaktheit benutzt, um die unendliche Additivität auf die schon bekannte endliche Additivität zurückzuführen.

Ist $\mu(A) = \infty$, so enthält A Teilmengen $C_N \in D_\infty$ mit $\mu(C_N) \geq N$ für jedes $N \in \mathbb{R}$: bilde den Schnitt mit großen Würfeln, deren Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben.

Dann gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap C_N) = \mu(C_N) \geq N$, also

$$\mu(A) = \infty = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

□

2.6 Bemerkung. Beachte, dass wir nicht beweisen können, dass D_∞ eine σ-Algebra ist!

2.7 Lemma. *Es gilt $D_\infty^\sigma = \mathcal{O}^\sigma = \mathcal{A}^\sigma$, wobei $\mathcal{O}$ die Menge der offenen, und $\mathcal{A}$ die menge der abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ ist. Erinnerung: diese σ-Algebra wird die σ-Algebra der Borelmengen auf $\mathbb{R}^m$ genannt.*

Beweis. Da die abgeschlossenen Mengen genau (per Definition) die Komplemente der offenen Mengen sind, und σ-Algebren abgeschlossen unter Bildung von Komplementen, gilt $\mathcal{O}^\sigma = \mathcal{A}^\sigma$. Jeder dyadische Würfel ist Schnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$,daher $D_\infty^\sigma \subset \mathcal{O}^\sigma$.

Andererseits ist jede offene Menge vereinigung von dyadischen Würfeln, und da es von letzteren insgesamt nur abzählbar viele gibt, sogar abzählbare Vereinigung solcher Würfel, daher $\mathcal{O}^\sigma \subset D_\infty^\sigma$. □

2.8 Definition. Nach Satz 1.59 hat das σ-additive Prämaß μ auf D_∞ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}_\mu, \mu)$ (der bequemlichkeit halber lassen wir die Tilde weg).

Der sich ergebende Maßraum wird *Maßraum von Lebesgue* genannt, die zugehörigen messbaren Mengen *Lebesgue-messbar*, μ das *Lebesgue-Maß* und das sich ergebende Integral das *Lebesgue-Integral* (auf $\mathbb{R}^m$).

2.9 Bemerkung. Insbesondere gelten für die Lebesgue-integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ all die Konvergenz-Sätze, die wir für beliebige Maßräume hergeleitet haben, und mit denen wir schon am Ende von Diff 2 (damals ohne Beweise) gearbeitet haben.

2.10 Lemma. *Sei $Q := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$ ein kompaktes Quader. Dann gilt*

$$\mu(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m) =: V.$$

Beweis. Dies gilt per Konstruktion, wenn die a_i und b_i alle rationale Zahlen sind, deren Nenner einer 2-Potenz sind. Jede beliebige reelle Zahl kann aber beliebig genau durch solche rationalen Zahlen von oben und unten angenähert werden. Dadurch erhalten wir für beliebiges $\epsilon > 0$ "dyadische" Quader $Q_\epsilon^< \subset Q \subset Q_\epsilon^>$ mit

$$V - \epsilon \le \mu(Q_\epsilon^<) \le \mu(Q) \le \mu(Q_\epsilon^>) \le V + \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt $\mu(Q) = V$. □

2.11 Satz. *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1([a, b], \mu)$ Lebesgue-integrierbar auf $[a, b]$, und es gilt*

$$F(x) := \int_{[a,x]} f \, d\mu$$

ist differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$. Insbesondere

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Rechts steht das Riemann Integral.

Insbesondere: für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen stimmt das Riemann-Integral mit dem Lebesgue-Integral überein.

Beweis. Da f stetig, ist f messbar. Da $[a, b]$ kompakt, ist f beschränkt. Außerdem ist $\mu([a, b]) < \infty$. Damit folgt $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$.

Man beweist wie in Diff 1, dass $F(x)$ diffbar ist mit $F'(x) = f(x)$: damals wurden nur Eigenschaften des Integrals benutzt, die auch für das Lebesgue-Integral gelten. Da der Hauptsatz auch für das Riemann-integral gilt, folgt die Gleichheit von Lebesgue- und Riemann-Integral für stetige funktionen auf kompakten Intervallen. □

2.12 Bemerkung. Dies war eine der Fundamental Eigenschaften, die wir vom Lebesgue-Integral in Diff 2 gefordert hatten.

3 Nullmengen: sie spielen keine Rolle

Jetzt wollen wir uns nochmals mit allgemeinen Maßräumen beschäftigen. Wir haben bereits im letzten Semester gesehen, dass Mengen vom Maß Null keine Rolle spielen, und daher in der Regel bei Sätzen aus der Integrationstheorie vernachlässigt werden können. Dies soll hier nochmal systematisiert werden.

3.1 Konvention. $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ ist unser generischer Maßraum.

3.2 Definition. Eine Menge $N \in \mathfrak{M}$ heißt *Nullmenge*, falls $\mu(N) = 0$.

Wir sagen, eine Aussage $A(x)$ für $x \in \Omega$ gilt μ-fast überall, falls es eine Nullmenge N gibt, so dass $A(x)$ wahr ist für alle $x \notin N$.

3.3 Lemma. *Seinen $N_1, N_2, \ldots$ Nullmengen. Dann ist auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$ eine Nullmenge.*

Beweis. $\mu(N) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(N_i) = 0$. □

3.4 Lemma. *Sei $f\colon \Omega \to [0, \infty]$ messbar und $\int_\Omega f = 0$. Dann gilt:*

$$\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\} \qquad \textit{ist eine Nullmenge.}$$

Die Umkehrung gilt ebenfalls.

Beweis. Für $n > 0$ setze $E_n := f^{-1}([1/n, \infty])$. Dann gilt $0 = \int_{E_n} f \geq \int_{E_n} 1/n = \mu(E_n)/n$, also $\mu(E_n) = 0$. Somit

$$\mu f^{-1}(0, \infty]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-1}[1/n, \infty]) = 0.$$

Ist umgekehrt f nur auf einer Nullmenge N von Null verschieden, so gilt

$$\int_\Omega f = \int_N f + \int_{\Omega \setminus N} 0 = \int_N f = 0.$$

□

3.5 Definition. Wenn zwei messbare Funktionen $f_1, f_2\colon \Omega \to \mathbb{C}$ (oder $\to [0, \infty]$) sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, sind ihre Integrale über beliebige messbare Teilmengen gleich.

Vom Maßtheoretischen Standpunkt brauchen wir die Werte auf einer Nullmenge also gar nicht. Wir betrachten deshalb von jetzt an auch Funktionen $f\colon \Omega \setminus N \to \mathbb{C}$, falls N eine Nullmenge ist, und arbeiten mit solchen wie mit gewöhnlichen Funktionen, indem wir sie durch 0 auf N fortsetzen: $\tilde{f}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist so definiert, dass $\tilde{f}(x) = 0$ für $x \in N$ und $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in \Omega \setminus N$. Auf diese Weise definiert man Messbarkeit, Integrierbarkeit und ggf. das Integral auch für solche Funktionen f. Insbesondere wollen wir eine solche Funktion als Element von $\mathcal{L}^1$ verstehen, falls $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$.

3.6 Bemerkung. Alle Sätze dieser Vorlesung verallgemeinern sich auf die nur fast überall definierten Funktionen. Es soll allerdings überall (in den Voraussetzungen als auch in den Aussagen) jedes "für alle $x \in \Omega$" durch "für fast alle $x \in \Omega$" ersetzt werden.

Die Beweise bleiben nahezu gleich, es muss nur manchmal benutzt werden, dass eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist. Übungsaufgabe, dies nachzuprüfen.

3.7 Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Er heißt vollständig, wenn für jede Menge X, welche Teilmenge einer Nullmenge N ist, gilt: X ist messbar. (Wegen der Monotonie gilt dann zwangsläufig: $\mu(X) = 0$).

3.8 Satz. *Sei $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gibt es eine Fortsetzung $(\Omega, \overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mu})$ zu einem vollständigen Maßraum, welcher folgenden Eigenschaften hat:*

- *$X \in \overline{\mathfrak{M}}$ ist $\overline{\mathfrak{M}}$-messbare Nullmenge genau dann wenn es $N \in \mathfrak{M}$ gibt mit $X \subset N$ und $\mu(N) = 0$.*
- *$A \in \overline{\mathfrak{M}}$ genau dann wenn es eine μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ und eine Teilmenge $X \subset N$ gibt, so dass $A \cup X \in \mathfrak{M}$. In diesem Fall*
$$\overline{\mu}(A) = \mu(A \cup X). \tag{3.9}$$

3.10 Bemerkung. die zweite Eigenschaft ist nur scheinbar unsymmetrisch (nach oben): Sei $Y = N \setminus X$, dann gibt es $B \in \mathfrak{M}$ (nämlich $A \cup X \setminus N = A \setminus Y$), welches durch vernachlässigbares Verkleinern aus A entsteht.

Beweis. Wir definieren $\overline{\mathfrak{M}}$ durch die zweite Eigenschaft (die Existenz des X).
Es bleibt zu beweisen:

(1) $\overline{\mu}$, definiert durch Gleichung (3.9), ist wohldefiniert (es kann ja verschiedene X geben)

(2) $(\overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mu})$ ist wirklich ein Maßraum.

(3) $(\overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mu})$ ist wirklich vollständig: dies folgt aber, sobald Eigenschaft 1 bewiesen ist: ist $X \in \overline{\mathfrak{M}}$ eine Nullmenge, so gibt es $N \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(N) = 0$. ist $Y \subset X$, so auch $Y \subset N$, also nach der ersten Eigenschaft $\overline{\mu}(Y) = 0$, und insbesondere Y $\overline{\mu}$-messbar.

Rest Übungsaufgabe.
Alternativ erhält man, wie Satz 3.11 zeigt, für σ-endliche Maßräume $\overline{\mathfrak{M}}$, indem man den Maßfortsetzungssatz auf $\mathfrak{M}, \mu$ anwendet. □

3.11 Satz. *Die Vervollständigung $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ eines σ-additiven Prämaßes (Ω, R, μ) nach Satz 1.59, insbesondere das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, ist vollständig.*
Präziser: falls Ω σ-endlich ist (also abzählbar Vereinigung von Mengen von endlichem Maß) dann handelt es sich um die Vervollständigung der entsprechenden Fortsetzung auf R^σ.

Beweis. Es gilt $N \in \mathfrak{M}$ ist Nullmenge, wenn $\tilde{\mu}(S) = \tilde{\mu}(S \cap N) + \tilde{\mu}(S \cap (\Omega \setminus N))$ für jedes $S \subset \Omega$, und $\tilde{\mu}(S \cap N) = 0$ (wegen der Monotonie von $S \cap N$). Sei nun $X \subset N$. Wegen Monotonie gilt dann auch $\tilde{\mu}(S \cap X) = 0$. Andererseits gilt (nochmal wegen Monotonie) $\tilde{\mu}(S) = \tilde{\mu}(S \cap \Omega \setminus N) \leq \tilde{\mu}(S \cap (\Omega \setminus X)) \leq \tilde{\mu}(S)$. Da S beliebig, ist $X \in \mathfrak{M}$ und $\mu(X) = 0$.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathfrak{M}$ die Vervollständigung von (R^σ, μ) ist. Dies ist Übungsaufgabe. Wollten wir uns die Mühe nicht machen, könnten wir z.B. die Lebesgue-Mengen auch als diese Vervollständigung definieren!
Tipp für die Aufgabe: nach Definition des Prämaßes können wir eine messbare Menge von oben beliebig gut (im Maß-Sinn) durch abzählbare Vereinigungen von Elementes aus R approximieren. Beliebig gut wird zu "bis auf Maß Null", wenn wir hier wieder abzählbare Schnitte zulassen, und wenn die Maße endlich sind.
σ-endlich kann dazu benutzt werden, alles auf den Fall von Mengen von endlichem Mass zurücuzuführen. □

3.12 Bemerkung. Damit erhalten wir ein ganz gutes Bild von den Lebesgue-Messbaren Mengen: es handelt sich um Borelmengen, vereinigt mit einer Teilmenge einer Borel-Nullmenge.
Ohne dass wir dies bis jetzt bewiesen hätten:

(1) es gibt Lebesgue-Nullmengen im $\mathbb{R}^m$, welche keine Borelmengen sind.

(2) Es gibt Teilmengen des $\mathbb{R}^m$, welche nicht Lebesgue-messbar sind.

4 Kreuzprodukte von Maßen, Produktintegration

In Diff 2 basierten alle Berechnungen mehrdimensionaler Integrale auf einer Art Produktformel: dem Satz von Fubini, der uns erlaubte, die Rechnungen auf den 1-dimensionalen Fall zurückzuführen.

Wir haben jetzt endlich das Lebesgue-Integral definiert, müssen aber noch zeigen, dass diese Produktformel hier wirklich gilt.

Dazu wollen wir gleich allgemeinere Produkträume betrachten.

Folgendes kommt auch in den Anwendungen oft vor: man hat ein Modell, innerhalb dessen z.B. irgendwelche Messungen bechrieben werden (Modell=Maßraum, die Messungen liefern Punkte oder Teilmengen).

Jetzt gebe es noch Messungen für eine weitere Eigenschaft, und auch dazu ein Modell (=Maßraum).

Möchte man jetzt beide Messungen gleichzeitig interpretieren, so wird man in ganz natürlicher Weise Tupel der einzelnen Werte bilden. Das zugehörige Modell muss dann als Kreuzprodukt der einzelnen Modelle konstruiert werden. Auch Integration (=Mittelwertbildung, Erwartungswertbildung) soll dann auf diesem Kreuzprodukt möglich sein.

4.1 Notation. Im ganzen Abschnitt seien $(\Omega_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{M}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume.

4.1 Produkte von σ-Algebren

Alternative Definition zu dem, was angefangen ist:

(1) Definiere Prämaß auf von Produkt-Mengen erzeugter Algebra, zeige, dass es σ-additiv ist. Liefert vollständigen Produktmaßraum. Klar: liefert Lebesgue auf $\mathbb{R}^m$.

(2) Formuliere Fubini in dieser Situation (braucht: σ-endlich).

(3) Definiere Algebra (im Ringtheoretischen Sinn) der Funktionen, für die Fubini gilt (für endliche Maßräume)

(4) Zeige: Funktionenalgebra ist unter Limiten abgeschlossen.

(5) Zeige: die darin liegenden charakteristischen Funktionen sind σ-Algebra, und enthalten elementare Funktionen (endliche Maßräume)

(6) alle Nullmengen sind enthalten

(7) Damit folgt: wir erhalten die Produktmass Algebra (da diese Vervollständigung der erzeugten Algebra)

(8) Da jede L^1-Funktion Limes von Treppenfkt und die Funktionenalgebra abgeschlossen unter Limiten, gilt Fubini

(9) Erweiterung auf nicht-positive Fkt durch Differenzbildung

(10) Erweiterung auf σ-endliche Maßräume durhc Zerlegung in endilche Maßräume

(11) Kriterium für L^1 aus Umkehrung des Fubini

4.2 Definition. Wir definieren einen σ-additiven Prämaßraum (R, μ) auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ auf folgende Weise:

R bestehe aus endlichen Vereinigungen von Mengen der Form $A_1 \times A_2$ mit $A_i \in \mathfrak{M}_i$. Eine solche Menge nennen wir *messbares Rechteck*. Für solch eine Menge definieren wir $\mu(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$, und setzen dies additiv fort.

4.3 Lemma. *Definition 4.2 liefert wirklich einen σ-additiven Prämaßraum.*

Beweis. Der Beweis wird nicht in allen Details gegeben, wir haben ja schon bei $\mathbb{R}^m$ gesehen, wie man so etwas macht, und hier ist die Situation ähnlich (und sogar etwas einfacher).

Wichtig sind folgende Beobachtungen:

(1) jede endliche Vereinigung, Schnitt, Komplement von Mengen der Form $A_1^i \times A_2^i$, mit $A_j^i \in \mathfrak{M}_j$, kann auch als endliche disjunkte Vereinigung solcher Mengen geschrieben werden (allerdings nicht auf eindeutige Weise).

Damit sieht man insbesondere, dass man einen Kandidaten für $\mu(X)$ für jedes $X \in R$ erhält.

(2) Wird $X \in R$ auf zwei Arten als endliche disjunkte Vereinigung von Mengen der Form $A_1 \times A_2$ mit $A_i \in \mathfrak{M}_i$ dargestellt, so kann man, indem man alle vorkommenden Mengen schneidet, eine gemeinsame endliche Verfeinerung der Zerlegung erhalten.

Um zu zeigen, dass μ wohldefiniert und additiv ist, muss man also nur überprüfen, dass sich μ bei Zerlegungen korrekt verhält.

(3) Um σ-additivität nachzuweisen (und gleichzeitig Wohldefiniertheit von μ), benutzen wir einen Trick: wie oben nahe gelegt genügt es, für eine disjunkte Zerlegung $A \times B = \bigcup U_i \times V_i$ zu zeigen, dass $\mu_1(A)\mu_2(B) = \sum \mu_1(U_i)\mu_2(V_i)$. Dafür betrachte die abzählbar vielen messbaren Funktion $\chi_{U_i}(x) \cdot \mu_2(V_i)$ auf Ω_1. Dann ist $\int \chi_{U_i}(c)\mu_2(V_i) d\mu_1(x) = \mu_1(U_i)\mu_2(V_i)$. Andererseits ist nach dem Satz über monotone Konvergenz die Abzählbare Summe integrierbar, und $\sum \mu_1(U_i)\mu_2(V_i) = \int \sum \chi_{U_i}(x)\mu_2(V_i)\, d\mu_1(x)$. Da aber $U_i \times V_i$ eine disjunkte Zerlegung von $A_1 \times A_2$, ist für jedes feste x in A_1 $\sum \chi_{U_i}(x)\mu_2(V_i) = \sum_{\{i;\, x \in U_i\}} \mu_2(V_i) = \mu_2(A_2)$, da die vorkommenden V_i gerade eine abzählbare disjunkte Zerlegung von A_2 liefern. Somit $\int_{A_1} \sum \chi_{U_i}(x)\mu_2(V_i) = \int_{A_1} \mu_2(A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$, sie zu beweisen war.

$\square$

4.4 Definition. Den sich durch den Maßerweiterungssatz auf Lemma 4.3 ergebenden Maßraum nennen wir (vollständigen) Produktmaßraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{M}, \mu)$.

4.5 Korollar. *Wenden wir diese Konstruktion auf das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^l$ an, erhalten wir das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{k+l}$.*

Beweis. Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{k+l}$ ist per Konstruktion eine Vervollständigung des durch dyadische “Rechtecke” gebildeten Prämaßraums. Dieser ist im Lebesgue-Produktprämaßraum enthalten, also gilt dasselbe für die Vervollständigungen. Um die Umkehrung zu zeigen, muss man nachweisen, dass jedes Produkt $A \times B$ Lebesgue-messbarer Mengen wieder Lebesgue-messbar ist: Übungsaufgabe.

Betrachte folgendes Diagramm von Inklusionen von σ-Algebren und Mengensystemen.

$$\begin{tikzcd}
E_{k+l}^\infty \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & (E_{k+l}^\infty)^\sigma \arrow[r, equal] & (E_{k+l}^\infty)^\sigma \arrow[r] & \overline{(E_{k+l}^\infty)^\sigma} = \mathfrak{M}_{k+l} \\
E_k^\infty \times E_l^\infty \arrow[r] & (E_k^\infty)^\sigma \times (E_l^\infty)^\sigma \arrow[r] \arrow[u, "b"'] \arrow[d, "e"'] & ((E_k^\infty)^\sigma \times (E_l^\infty)^\sigma)^\sigma \arrow[r] \arrow[u, "="', "c"] \arrow[d] & \overline{((E_k^\infty)^\sigma \times (E_l^\infty)^\sigma)^\sigma} \arrow[u, "="', "d"] \arrow[d, "f"', "="] \\
 & \overline{(E_k^\infty)^\sigma} \times \overline{(E_l^\infty)^\sigma} \arrow[r] & (\overline{(E_k^\infty)^\sigma} \times \overline{(E_l^\infty)^\sigma})^\sigma \arrow[r] & \overline{(\overline{(E_k^\infty)^\sigma} \times \overline{(E_l^\infty)^\sigma})^\sigma} \arrow[d, "="] \\
 & & & \overline{(\mathfrak{M}_k \times \mathfrak{M}_l)^\sigma}
\end{tikzcd}$$

Zur Erläuterung: E_k^∞ ist die Menge der “Würfelchen”, aus denen D_k^∞ gebildet wird. Es handelt sich also um keine Mengentheoretische Algebra, aber die erzeugte σ-Algebra ist die gleiche wie die von D_k^∞ erzeugte. Das Kreuzprodukt steht immer dafür, dass die enthaltenen Mengen die Kreuzprodukte der in den Faktoren enthaltenen Mengen sind. Das σ steht jeweils für die erzeugte σ-Algebra. Auf allen Mengensystemen und σ-Algebren ist jeweils das Produktmaß gegeben. Der überstricht steht für den Übergang zu den Vervollständigungen (indem alle “fehlenden” Nullmengen hinzugenommen werden).

Aus der Definition folgt dann, dass es die Inklusion a gibt. Um zu zeigen, dass b injektiv ist (hier geht der Pfeil nach oben), zeige zunächst, dass für festes $B \in E_l^\infty$ die Menge H aller $A \subset \mathbb{R}^k$ mit $A \times B \in (E_{k+l}^\infty)^\sigma$ eine σ-Algebra bildet. Somit enthält die Menge dieser A also insbesondere die erzeugte σ-Algebra $(E_k^\infty)^\sigma$ (da H auch E_k^∞ enthält). Als nächstes zeigt man, dass für festes $A \in (E_k^\infty)^\sigma$ die Menge H' der B, so dass $A \times B \in (E_{k+l}^\infty)^\sigma$ ebenfalls eine σ-Algebra ist, somit mit E_l^∞ auch $(E_l^\infty)^\sigma$ enthält. Dies heißt gerade, dass es die Inklusion b gibt.

Nimmt man a und b zusammen, folgt durch Übergang zu den erzeugten σ-Algebren, dass jede Seite von c in der anderen enthalten ist, bei c also wirklich eine Gleichheit vorliegt. Dann liegt auch bei d, beim übergang zu den Vervollständigungen, Gleichheit vor.

Es ist klar, dass e eine Inklusion ist, und damit, nach Übergang zur erzeugten σ-Algebra und deren Vervollständigung, auch f.

Um zu zeigen, dass f wirklich surjektiv ist, zeigen wir genauer, dass

$$\overline{(D_k^\infty)^\sigma} \times \overline{(D_l^\infty)^\sigma} \subset \overline{((D_k^\infty)^\sigma \times (D_l^\infty)^\sigma)^\sigma}. \tag{4.6}$$

Da $\overline{((D_k^\infty)^\sigma \times (D_l^\infty)^\sigma)^\sigma}$ eine vollständige σ-Algebra ist, folgt dann auch, dass die Vervollständigung der erzeugten σ-Algebra der linken Seite, also $\overline{(\overline{(D_k^\infty)^\sigma} \times \overline{(D_l^\infty)^\sigma})^\sigma}$ darin enthalten ist. Diese Inklusion wiederum folgt, da die rechte Seite von (4.6) eine σ-Algebra ist, sobald für eine Nullmenge $N \in \overline{(E_k^\infty)^\sigma}$ und eine Menge $F \in \overline{(E_l^\infty)^\sigma}$ welche entweder Nullmenge ist oder zu $(E_l^\infty)^\sigma$ gehört, dass

$N \times F \in \overline{(D_k^\infty)^\sigma \times (D_l^\infty)^\sigma}$, was man aus der Definition des äußeren Maßes herleitet. Benutzen muss man, dass $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^l$ σ-endlich sind, sowie das folgende Lemma. □

4.7 Lemma. *Sei $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ durch Maßfortsetzung aus dem σ-additiven Prämaßraum (Ω, R, μ) entstanden. $N \subset \Omega$ ist Nullmenge genau dann, wenn ihr äußeres Maß Null ist (daraus folgt insbesondere schon die Messbarkeit).*

Beweis. Es muss natürlich nur die Messbarkeit nachgewiesen werden, da für messbare Menge per Definition Maß und äußeres Maß übereinstimmen.

Für die Messbarkeit sei $X \subset \Omega$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $\tilde{\mu}(X) = \tilde{\mu}(X \cap N) + \tilde{\mu}(X \cap N^c)$. Da $\tilde{\mu}(N) = 0$ und das äußere Maß monoton, ist auch $\tilde{\mu}(X \cap N) = 0$. Die Subadditivität und Monotonie des äußeren Maßes impliziert andererseits auch

$$\tilde{\mu}(X) \leq \tilde{\mu}(X \cap N) + \tilde{\mu}(X \cap N^c) = \tilde{\mu}(X \cap N^c) \leq \tilde{\mu}(X).$$

□

4.2 Satz von Fubini

Hier wollen wir jetzt den in Diff 2 schon viel benutzten Satz von Fubini tatsächlich beweisen.

Wir führen zunächst ein paar abkürzende Begriffe ein:

4.8 Definition. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{M}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume.

Für $X \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ und $x \in X$, $y \in Y$ setze

$$E_{(x,?)} := \{p \in \Omega_2 \mid (x,p) \in E\} \subset \Omega_2; \qquad E_{(?,y)} := \{q \in X \mid (q,y) \in E\} \subset \Omega_1.$$

Für $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to Z$ definieren wir

$$f(x,?)\colon \Omega_2 \to Z; q \mapsto f(x,q); \qquad f(?,y)\colon \Omega_1 \to Z; p \mapsto f(p,y).$$

4.9 Satz. ***(Fubini)*** *Seien Ω_1 und Ω_2 σ-endlich (also vereinigung von abzählbar vielen Mengen von endlichem Maß).*

Seien $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,\infty]$ messbar (bzw. $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$). Dann gilt:

(1) $f(x,?)$ ist $\mathfrak{M}_2$-messbar für fast alle $x \in \Omega_1$ (bzw. $f(x,?) \in \mathcal{L}^1(\Omega_2)$ für fast alle $x \in \Omega_1$).

(2) Die (fast überall definierte) Abbildung $x \mapsto g(x) := \int_{\Omega_2} f(x,?)\, d\mu_2 = \int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)$ ist $\mathfrak{M}_1$-messbar (bzw. liegt in $\mathcal{L}^1(\Omega_1)$).

(3) $\int_{\Omega_1} (\int_{\Omega_2} f(x,?)\, d\mu_2)\, d\mu_1 = \int_{\Omega_1} (\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y))\, d\mu_1(x) = \int_\Omega f\, d\mu$.

Ist umgekehrt $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$ messbar und gilt $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) < \infty$, so gilt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, und die oben stehenden Folgerungen gelten.

4.10 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.9 kann man die Integrationsreihenfolge vertauschen.*

Beweis. Die Konstruktion des Produktmaßes war völlig symmetrisch in Ω_1 und Ω_2, also gilt jeder Satz auch, wenn die Rollen von Ω_1 und Ω_2 vertauscht werden. $\square$

Der Beweis des Satzes von Fubini ist recht mühsam. Die Strategie ist folgende: wir definieren zunächst eine Menge von Funktionen, die den Satz von Fubini tatsächlich erfüllen (per Definition, aber mit noch einigen stärkeren Eigenschaften), und zeigen dann, dass es sich hierbei um alle messbaren Funktionen handelt.

Wir machen zunähhst die Annahme, dass Ω_1 und Ω_2 endiche Maßräume sind (z.B. beschränkte Intervalle in $\mathbb{R}$).

4.11 Definition. Sei F_1 die Menge aller messbaren $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

- $f(x,?)\colon \Omega_2 \to [0,\infty]$ ist $\mathfrak{M}_2$-messbar für fast jedes $x \in \Omega_1$.
- Für jedes $B \in \mathfrak{M}_2$ ist die (fast überall definierte) Funktion $x \mapsto \int_B \chi_{A\times B}(x,?)f(x,?)\, d\mu_2$ $\mathfrak{M}_1$-messbar und es gilt für jedes $A \in \mathfrak{M}_1$ $\int_A(\int_B f(x,?)\ d\mu_2)\ d\mu_1(x) = \int_{A\times B} f\, d\mu$.

Um zu zeigen, dass alle messbaren Funktionen in F_1 liegen, werden wir dies zunächst für die charakteristsichen Funktionen zeigen. Wir wollen dazu zeigen, dass die mengen, deren charakteristischen Funktionen in F_1 liegen, eine σ-Algebra bilden. Insbesondere müssen endliche Schnitte, sprich Produkte der entsprechenden charakteristischen Funktionen, in F_1 enthalten sein. Dies ist bei weitem nicht offensichtlich. Wir machen daher eine Hilfsdefinition, für die diese Eigenschaft per Definition stimmt:

Sei F_2 die Menge der Messbaren Funtkionen $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,\infty]$, so dass für jedes $g \in F_1$ auch $fg \in F_1$.

4.12 Lemma. *Falls $f_1, f_2 \in F_2$, $a \in [0,\infty)$, dann auch $f_1+f_2, af_1, f_1\cdots f_2 \in F_2$.*

Beweis. $f_1 \cdot f_2$ nach Definition von F_2. Für $f_1 + f_2$ und af_1 benutze, dass Messbarkeit und Integral additiv und verträglich mit Multiplikation mit einer Konstanten sind. $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass jede messbare Funktion $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,\infty]$ in F_2 liegt. Dies geschieht in einer Folge von Lemmas, und wie angekündigt, werden wir uns zunächst um charakteristische Funktionen messbarer Mengen kümmern.

4.13 Lemma. *Seien $A_i \in \mathfrak{M}_i$. Dann liegt $\chi := \chi_{A_1\times A_2}$ in F_1 und in F_2.*

Beweis. $\chi_{(x,?)}$ ist entweder Null oder χ_{A_2}, also messbar für alle $x \in \Omega_1$, und $\int_B \chi_{(x,?)} = \begin{cases} 0 & x \notin A_1 \\ \mu_2(B\cap A_2) & x \in A_1, \end{cases}$ so dass $\int_A \int_B \chi_{(x,?)} = \mu_1(A\cap A_1)\mu_2(B\cap A_2) = \int_{A\times B}\chi$, also $\chi \in F_1$.

Falls $g \in F_1$, so sieht man ähnlich dass $\chi \cdot g \in F_1$: benutze, dass Produkte messbarer Mengen messbar sind, und dass die zweite Bedingungen für χg für vorgegebenen Mengen B und A gerade die entsprechende Bedingung für g für $B \cap A_2$ und $A \cap A_1$ ist.

Bemerkung: Hierin liegt der Grund, dass in der Definition von F_1 nicht nur $B = \Omega_2$ und $A = \Omega_1$ betrachtet werden darf: indem man mehr verlangt, wird es leichter, zu zeigen, dass die Menge unter gewissen Operationen abgeschlossen ist. $\square$

4.14 Lemma. *Sei $R := \{A \in \mathfrak{M} \mid \chi_A \in F_2\}$. Dann ist R eine σ-Algebra.*

Beweis. (1) Nach Lemma 4.13 ist $\Omega_1 \times \Omega_2 \in R$.

(2) Sei $f \in F_2$ mit $0 \leq f \leq 1$. Dann ist auch $1 - f \in F_2$. Hier benutzen wir, dass Ω_1 und Ω_2 (im moment) endliche Massräume sind, daher gilt dann $f, 1 \in \mathcal{L}^1$, und damit auch $1-f \in \mathcal{L}^1$. Entsprechend sind auch automatisch die Bedingungen erfüllt, die überprüft werden müssen (dieses Differenzbilden würde nicht funktionieren, wenn die vorkommenden Integrale auch den Wert $+\infty$ annehmen könnten, wir benutzen also entscheidend die Endlichkeit der Maßräume).

Dies übersetzt sich dazu, dass aus $A \in R$ folgt, dass $\Omega_1 \times \Omega_2 \setminus A \in R$.

(3) Falls $A, B \in R$, so ist $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B \in F_2$, da nach Definition F_2 abgeschlossen unter Produkten. Da R abgeschlossen unter Komplementen, ist R also auch abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen und unter Bildung von Differenzmengen.

(4) Damit ist R eine maßtheoretische Algebra. Um zu schließen, dass R eine σ-Algebra ist, muss man jetzt nur noch überprüfen, dass R abgeschlossen ist unter abzählbare anwachsenden Vereinigungen.

Seien also $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \in R$mit Vereinigung A. Sei $g \in F_1$. Dann ist $\chi_A = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}$ und $\chi_A g = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} g$, wobei die Folge punktweise monoton wachsend ist ($g \geq 0$ nach Voraussetzung). Der monotone Limes messbarer Mengen ist messbar, und nach dem Satz über monotone Konvergenz hier können Integral und Grenzwert vertauscht werden. Damit ergibt sich sofort $\chi_A g \in F_1$, also nach Definition $\chi_A \in F_2$.

$\square$

R ist also eine σ-Algebra, welche alle messbaren Rechtecke enthält. Um zu zeigen, dass R mit $\mathfrak{M}$ übereinstimmt, müssen wir wegen Satz 3.11 nur noch zeigen, dass R vollständig ist (also alle μ-Nullmengen enthält).

4.15 Lemma. *Sei $N \in \mathfrak{M}$ eine μ-Nullmenge. Dann gilt $\chi := \chi_N \in F_1 \cap F_2$.*

Beweis. Wir müssen uns zurückerinnern, welche Mengen μ-Nullmengen sind: ihr äußeres Maß ist Null. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es also abzählbar viele messbare Rechtecke $A_i^\epsilon \times B_i^\epsilon$ mit $N \subset \bigcup A_i \times B_i^\epsilon$, und so dass $\sum \mu_1(A_i^\epsilon)\mu_2(B_i^\epsilon) < \epsilon^3$.

Im Beweis von Lemma 4.3 haben wir bereits gesehen, dass $\sum \mu_1(A_i^\epsilon)\mu_2(B_i^\epsilon) = \int_{\Omega_1} \sum_i \chi_{A_i^\epsilon}(x)\mu_2(B_i^\epsilon)$ (wir haben insbesondere auch gesehen, dass der Integrand messbar ist). Nach Voraussetzung ist dies $< \epsilon^3$.

Somit ist das Maß der x, wo der Integrand $> \epsilon$ ist, kleiner als ϵ^2: Falls $M_\epsilon := \{x \in \Omega_1 \mid \sum_i \chi_{A_i^\epsilon(x)}\mu_2(B_i^\epsilon) > \epsilon\}$, dann $\mu_1(M_\epsilon) < \epsilon^2$.

Betrachte nun $M := \{x \in \Omega_1 \mid \tilde{\mu}_2(N_{(x,?)}) > 0\}$ (da nicht bekannt ist, ob $N_{(x,?)} \in \mathfrak{M}_2$, müssen wir das äußere Maß benutzen). Wir wollen zeigen, dass dies eine Nullmenge ist. Es gilt:

$$M = \bigcup_{k=n}^{\infty} \underbrace{\{x \in \Omega_1 \mid \tilde{\mu}_2(N_{(x,?)}) > \frac{1}{k}\}}_{=:V_k}.$$

Da $N \subset \bigcup_i A_i^\epsilon \times B_i^\epsilon$ gilt $N_{(x,?)} \subset \bigcup_i (A_i^\epsilon \times B_i^\epsilon)_{(x,?)}$, oder $\tilde{\mu}_2(N_{(x,?)}) \leq \sum_i \chi_{A_i^\epsilon}(x)\mu_2(B_i^\epsilon)$. Wir benutzen hier, dass $\tilde{\mu}$ größer wird, wenn die Menge größer wird, und dass $\tilde{\mu} = \mu$ für messbare Mengen wie die B_i^ϵ.

Wenn also für ein $x \in \Omega_1$ gilt $\tilde{\mu}_2(N_{(x,?)}) > 1/k$, dann auch (mit $\epsilon = 1/k$) $\sum_i \chi_{A_i^{1/k}}(x)\mu_2(B_i^{1/k}) > 1/k$, oder in anderen Worten $V_k \subset M_{1/k}$. Dies impliziert $\tilde{\mu}_1(V_k) \leq \mu_1(M_{1/k}) \leq 1/k^2$. Auch hier müssen wir das äußere Maß benutzen, da nicht klar ist, ob V_k messbar ist. $M_{1/k}$ hingegen ist messbar, das $\sum_i \chi_{A_i^{1/k}}(x)\mu_2(B_i^{1/k})$ messbar. Wegen der σ-Subadditivität von $\tilde{\mu}_1$ gilt also für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\mu}_1(M) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu_1(V_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} 1/k^2.$$

Da die Reihe konverigert und n beliebig ist, folgt $\tilde{\mu}_1(M) = 0$.

Da $\mathfrak{M}_1$ vollständiger Maßraum, folgt dass M messbar ist mit $\mu_1(M) = 0$.

Für $x \notin M$ ist $\tilde{\mu}_2(N_{(x,?)}) = 0$ (nach Definition). Mit dem gleichen Argument ist dann $N_{(x,?)} \subset \Omega_2$ messbar mit Maß 0, also $\chi_{N_{x,?}}(y)$ $\mathfrak{M}_2$-messbar mit Integral 0.

Somit $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2}\right)\chi_{(x,?)}\, d\mu_2\Big) = \int_{\Omega_1} 0 = 0 = \mu(N) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \chi_N$.

Damit gilt $\chi_N \in F_1$.

Multipliziert man mit $g \in F_1$, so gilt für $x \notin M$: $\chi(x,?)g(x,?)$ ist messbar (als Produkt messbarer Mengen) und verschwindet ausserhalb der Nullmenge $N_{(x,?)}$, also $\int_{\Omega_2} \chi(x,?)g(x,?) = 0$. Damit folgt auch $\chi_N \in F_2$. □

Wir haben also bis jetzt bewiesen:

4.16 Lemma. *Sie $A \in \mathfrak{M}$. Dann ist $\chi_A \in F_2$.*

4.17 Lemma. *Seien $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \in F_2$. Setze $f := \lim f_i$. Dann gilt $f \in F_2$.*

Beweis. Fixiere $g \in F_1$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es Nullmenge N_i, so dass $f_i g(x,?)$ messbar für $x \notin N_i$. Setze $N := \bigcup N_i$. Dann ist N Nullmenge, und $f_i g(x,?)$ ist messbar für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $x \notin N$. Der Limes messbarer Mengen ist messbar, also ist auch $f(x,?)$ messbar für $x \notin N$.

Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist für $A \in \mathfrak{M}_1$ und $B \in \mathfrak{M}_2$

$$\begin{aligned}\int_A \left(\int_B fg(x,?)\, d\mu_2\right) d\mu_1(x) &= \int_A \lim_i \left(\int_B f_i g(x,?)\, d\mu_2\right) d\mu_1(x)\\ &= \lim_i \int_A \left(\int_B f_i g(x,?)\, d\mu_2\right) d\mu_1(x)\\ &= \lim_i \int_{A\times B} f_i g\, d\mu = \int_{A \times B} fg\, d\mu,\end{aligned}$$

wobei auch die jeweiligen Messbarkeiten Folgerung aus diesem Satz sind.

Also $f \in F_2$. □

Wir können nun den Satz von Fubini beweisen:

Beweis von Satz 4.9 für endliche Maßräume. Sei $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,\infty]$ messbar. Dann gibt es messbare Treppenfunktionen $f_i\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,\infty]$ mit $f_1 \le f_2 \le \dots$ und $\lim_i f_i = f$.

Nach Lemma 4.16 und Lemma 4.12 sind alle $f_i \in F_2$. Nach Lemma 4.17 damit auch f. Da $F_2 \subset F_1$, und mit $A = \Omega_1$ und $B = \Omega_2$ folgt die Formel

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) \, d\mu_1(x).$$

Falls $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, so wendet man das bisher bewiesene auf positiven und negativen Teil von Real- und Imaginärteil getrennt an.

Ist zuletzt $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2$ messbar, so wenden wir den Satz auf $|f| : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,\infty]$ an, und sehen nach Voraussetzung, dass $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| < \infty$, also $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Damit gelten dann auch die Folgerungen, die für Funktionen aus $\mathcal{L}^1$ gelten. □

Beweis von Fubini für σ-endliche Maßräume. Seien Ω_1 und Ω_2 Vereinigungen von abzählbar vielen Mengen von endlichem Maß. Man kann erreichen, dass diese Mengen paarweise disjunkt sind, also $\Omega_1 = \bigcup E_i$ und $\Omega_2 = \bigcup F_j$ abzählbare Vereinigungen von paarweise disjunkten Mengen von endlichem Maß. Dann gilt $\Omega_1 \times \Omega_2 = \bigcup E_i \times F_j$ ist Vereinigung von disjunkten Mengen von endlichem Mass.

Sei nun $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,\infty]$ messbar. Wende nun Fubini an auf die Funktionen $f\chi_{E_i \times F_j} : E_i \times E_j \to [0,\infty]$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f &= \sum_{i,j} \int_{E_i \times E_j} f = \sum_{i,j} \int_{E_i} (\int_{F_j} f(x,?)\, d\mu_2)\, d\mu_1(x) \\
&= \sum_i \int_{E_i} \sum_j (\int_{F_j} f(x,?)\, d\mu_2)\, d\mu_1(x) = \sum_i \int_{E_i} (\int_{\Omega_2} f(x,?)\, d\mu_2)\, d\mu_1(x) \\
&= \int_{\Omega_1} (\int_{\Omega_2} f(x,?)\, d\mu_2)\, d\mu_1(x),
\end{aligned}$$

unter Ausnutzung des Satzes über monotone Konvergenz für μ_1 und μ_2. Falls $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, kann man die gewonnene Formel auf positiven und negativen Teil von Real- und Imaginärteil anwenden.

Schließlich folgt wie im vorherigen Beweis, dass $f \in \mathcal{L}^1$, falls

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f(x,y)| \, d\mu_2(y)\, d\mu_1(x) < \infty.$$

□

5 Die Transformationsformel für Integrale im $\mathbb{R}^n$

Die letzte wichtige Regel, die wir zur Berechnung von Integralen im $\mathbb{R}^m$ in Diff 2 benutzt haben, war die Transformationsformel, die jetzt bewiesen werden soll.

5.1 Lemma. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\Phi\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. D.h. Φ ist bijektiv und sowohl Φ als auch Φ^{-1} sind C^1-Funktionen zwischen diesen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$. Sei $N \subset U$.*

Dann gilt: N ist Nullmenge genau dann wenn $\Phi(N)$ Nullmenge, N ist messbar genau dann wenn $\Phi(N)$ messbar.

Beweis. U ist abzählbare Vereinigung von kompakten dyadischen Würfeln W_i. Also $N = \bigcup_i N \cap W_i$, und $\Phi(N) = \bigcup \Phi(N \cap W_i)$.

Es genügt also, die Aussagen für jedes $N \cap W_i$ zu zeigen. Da W_i (und damit auch $W_i \times W_i$) kompakt und Φ stetig ist, gibt es $L > 0$ so dass

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L\,|x-y|_\infty \qquad \text{für alle } x, y \in W_i. \tag{5.2}$$

Sei $N \cap W_i$ eine Nullmenge. Nach Definition (äußeres Maß) bedeutet dies, dass für jedes $\epsilon > 0$ abzählbar viele dyadische Würfel V_i (mit Kantenlänge k_i) existieren mit $N \subset \bigcup V_i$ und $\sum_i \mu(V_i) = \sum_i k_i^m < \epsilon$.

Damit natürlich auch $\Phi(N) \subset \bigcup \Phi(V_i)$. Leider ist $\Phi(V_i)$ kein Würfel, aber wegen Ungleichung (5.2) ist $\Phi(V_i)$ in einem dyadischen Würfel Q_i der Kantenlänge $2Lk_i$ enthalten. Dann gilt

$$\sum_i \mu(Q_i) \leq \sum_i 2Lk_i^m \leq 2L\epsilon.$$

Da L fest, ist das äußere Maß von $\Phi(N \cap W_i)$ Null, und damit $\Phi(N \cap W_i)$ eine Nullmenge.

Ist $\Phi(N)$ eine Nullmenge, wende man dasselbe Beweisprinzip mit der Abbildung $\Phi^{-1}\colon W \to V$ an, da $\Phi^{-1}(\Phi(N)) = N$.

Sei $R := \{M \subset U \mid M \text{ und } \Phi(M) \text{ messbar}\}$. Dann enthält R alle Nullmengen. Ist $K \subset U$ kompakt, so ist auch $\Phi(K)$ kompakt, und damit messbar. R enthält also alle kompakten Mengen, insbesondere alle dyadischen kompakten Rechtecke.

Φ ist eine Bijektion, damit ist es verträglich mit Vereinigungen, Komplement-Bildung, etc. Es folgt dass R eine σ-Algebra ist. Wegen Satz 3.11 besteht R also aus allen Lebesgue-messbaren Teilmengen von U.

Wieder kann man das selbe Spiel auch rückwärts treiben, indem Φ durch Φ^{-1} ersetzt wird. □

5.3 Satz. *Seien $A, B \subset \mathbb{R}^m$ und $U \subset A$, $V \subset B$ offen, so dass $\mu(A \setminus U) = 0 = \mu(B \setminus V)$. Sei $\Phi\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $f\colon B \to \mathbb{C}$. Dann gilt:*
$f \in \mathcal{L}^1(B)$ genau dann wenn $f \circ \Phi \cdot |\det \Phi'| \in \mathcal{L}^1(A)$, und in diesem Fall

$$\int_B f = \int_A f \circ \Phi \cdot |\det \Phi'|\,. \tag{5.4}$$

Beachte: Φ' und $f \circ \Phi$ sind nur auf U, also fast überall definiert, aber das Integral ist natürlich trotzdem definiert.

Da $\Phi\colon U \to V$, ist $\Phi'(x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m$, und damit $\det \Phi'(x)$ für jedes $x \in U$ definiert. Da $\Phi \in C^1(U, V)$, ist $\det \Phi' \in C^0(U, \mathbb{R})$. Φ Diffeomorphismus impliziert sogar, dass $\det(\Phi'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$ (vergleiche Satz über implizite Funktionen. Konkret hier $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}$, also $(\Phi^{-1})' \circ \Phi' = \mathrm{id}' = \mathrm{id}$).

Der Beweis dieses Satzes ist recht umfangreich. Wir werden ähnlich vorgehen wie beim Satz von Fubini: die Aussage für komplexwertige f folgt (indem man positiven und negativen Teil von Real- und Imaginärteil getrennt betrachtet), aus der Aussage für $f\colon B \to [0,\infty]$.

Da nach Voraussetzung $A\backslash U$ und $B\backslash V$ Nullmengen sind, gelten die Aussagen von Satz 5.3 genau dann, wenn sie gelten mit B ersetzt durch V und A ersetzt durch U.

Außerdem genügt es, sich darauf zu beschränken, dass U endliches Volumen hat: ein beliebiges A kann man ja, z.B. durch Schneiden mit Einheitswürfeln, in abzählbar viele Menge von endlichem Volumen disjunkt zerlegen (wieder bis auf Nullmengen), und den Satz auf diese Teile anwenden.

Wegen des Satzes über monotone Konvergenz und Linearität des Integrals genügt es, charakteristische Funktionen von messbaren Mengen zu betrachten. Die Kollektion R der messbaren Mengen, deren charakteristische Funktionen den Satz (mit $A = U$ und $B = V$) erfüllen, bilden eine σ-Algebra. Um endliche Schnitte behandeln zu können, muss man genau genommen wieder künstlich eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge definieren, und wir müssen verlangen, dass Gleichung (5.4) nicht nur für U, sondern auch für jedes dyadischen Rechteck I, welches in U enthalten sind, gilt. V muss dann durch $\Phi(I)$ ersetzt werden.

Mit Hilfe von Lemma 5.1 erkennt man, dass alle Nullmengen zu R gehören.

Ein Diagramm zu diesen Reduktionsschritten:

Eigenschaft	Fubini	Trafosatz
endlich statt σ-endlich	Additivität des Integrals unter Zerlegung der Integrationsbereiche	
$f\colon U \to [0,\infty]$ statt $f\colon U \to \mathbb{C}$	Linearität des Integrals und Zerlegung der Funktionen	
Treppenfunktionen statt $f\colon U \to [0,\infty]$	Approximation und monotone Konvergenz	
χ_X statt Treppenfunktionen	Linearität des Integrals	
statt alle χ_X nur zeigen: diese X bilden vollständige σ-Algebra welche die erzeugenden Mengen (dyadische Quadrate oder Produktmengen) enthält	Charakterisierung der σ-Algebra aller messbaren Funktionen	
Nullmengen	Lemmas	
σ-Algebra Eigenschaft	Trick: zusätzliche Definition, um Abschluss unter Schnitten zu erhalten; Endlichkeit, um Komplemente zu erhalten; abzählbare Vereinigungen mit monotoner Konvergenz	

Damit bleibt nur noch zu zeigen, dass alle dyadischen Rechtecke zu R gehören. Dies war im Beweis des Satzes von Fubini fast automatisch richtig. Hier müssen wir für dieses Resultat noch schwer arbeiten.

Vorher aber zusammenfassend:

5.5 Satz. *Der Transformationssatz 5.3 gilt, falls für jedes abgeschlossene dyadischen Rechteck $I \subset U$ gilt:*

$$\operatorname{vol}(\Phi(I)) = \int_{\Phi(I)} 1\, d\mu = \int_I |\det \Phi'|\ d\mu.$$

Es müssen jetzt natürlich die Voraussetzungen von Satz 5.5 bewiesen werden. Dies soll per Induktion über die Dimension m geschehen. Dabei werden wir auch den Satz von Fubini mehrfach verwenden. Allerdings ist klar, dass man für beliebiges Φ kaum eine Handhabe hat, per Induktion die Dimension zu reduzieren. Deshalb schauen wir uns zunächst spezielle Φ an.

5.6 Lemma. *Die Voraussetzungen von Satz 5.5 sind erfüllt, falls $\Phi(x_1,\dots,x_m) = \Phi(x_1,\dots,x_{m-1},\phi(x_1,\dots,x_m))$.*

Beweis. In diesem Fall ist $\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & \\ \partial\phi/\partial x_1 & \cdots & \partial\phi/\partial x_m & \end{pmatrix}$. Insbesondere gilt für die Determinante: $\det \Phi' = \partial\phi/\partial x_m \neq 0$. Auf I wechselt diese Determinante ihr Vorzeichen nicht. Sei sie positiv, also für festes $(x_1, \dots, x_{m-1})$ die Funktion $\phi(x_1, \dots, x_{m-1}, ?)$ monoton wachsend.

Sei $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \subset U$ ein dyadisches Rechteck. Dann ist $\Phi(I) = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_m \in [\phi(x_1, \dots, x_{m-1}, a_m), \phi(x_1, \dots, x_{m-1}, b_m)], x_i \in [a_i, b_i](i < m)\}$. Nach Fubini gilt also

$$\begin{aligned}
\mu(\Phi(I)) &= \int_{[a_1,b_1]\times\ldots[a_{m-1},b_{m-1}]} \phi(x_1, \dots, x_{m-1}, b_m) - \phi(x_1, \dots, x_{m-1}, a_m) d\mu(x_1, \dots, x_{m-1}) \\
&= \int_{[a_1,b_1]\times\cdots[a_{m-1},b_{m-1}]} \int_{a_m}^{b_m} \partial\phi(x_1, \dots, x_m)/\partial x_m \, dx_m \, d\mu(x_1, \dots, x_{m-1}) \\
&= \int_I |\det \Phi'| \, d\mu
\end{aligned}$$

Hier benutzen wir in der Mitte den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Ist $\det \Phi' < 0$, so drehen sich obere und untere Grenze um, da dann $\phi(x_1, \dots, x_{m-1}, ?)$ monoton fallend ist und man erhält ein zusätzliches Vorzeichen, so dass insgesamt die Formel mit $|\Phi'|$ korrekt ist. □

5.7 Korollar. *Die Voraussetzungen von Satz 5.5 sind für die Dimension $m = 1$ erfüllt, insbesondere gilt der Transformtaionssatz 5.3 in Dimension $m = 1$.*

Beweis. In diesem Fall hat Φ immer die in Lemma 5.6 behandelte Gestalt. □

5.8 Korollar. *Der Transformationssatz 5.3 gilt für Φ wie in Lemma 5.6.*

Beweis. Dies ist genau die Reduktion, die in Satz 5.5 zusammengefasst ist. □

5.9 Lemma. *Sei $m \geq 2$ und der Transformationssatz 5.3 sei für die Dimension $m - 1$ (und alle möglichen C^1-Diffeomorphismen) erfüllt.*

$\Phi \colon U \to V$ habe die spezielle Gestalt $\Phi(x_1, \dots, x_m) = (\Psi(x_1, \dots, x_m), x_m)$, wobei $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_{m-1})$.

Sei $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$

Schreibe $(x_1, \dots, x_m) = (y, x_m)$. Wie im Satz über implizite Funktionen betrachte die Matrix $\partial\Psi/\partial y$. Es gilt $\det \Phi' = \det(\partial\Psi/\partial y)$. Für festes x_m ist $(\Phi)_{x_m} := \Psi(?, x_m) \colon [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{m-1}, b_{m-1}] \to \mathrm{im}(\Psi_1(?, x_m)) \subset \mathbb{R}^{m-1}$ ein C^1-Diffeomorphismus (genau genommen, von einer offenen Umgebung dieses Rechtecks aufs Bild), da die Abbildung als Einschränkung einer injektiven Abbildung injektiv ist, und wegen des Satzes von der inversen Abbildung die Umkehrung ebenfalls C^1 ist.

Wir können die Induktionsvoraussetzung also auf $(\Phi)_{x_m}$ anwenden.

Insgesamt gilt $\Phi(I) = \{(y, x_m) \mid y \in (\Phi)_{x_m}([a_1, b_1]\times\cdots\times[a_{m-1}, b_{m-1}]), x_m \in$

$[a_m, b_m]\}$. *Nach Fubini und mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir also*

$$\begin{aligned} vol(\Phi(I)) &= \int_{a_m}^{b_m} \mathrm{vol}_{m-1}\left((\Phi_1)_{x_m}([a_1,b_1]\times\dots[a_{m-1},b_{m-1}])\right) \\ &= \int_{a_m}^{b_m}\left(\int_{(\Phi_1)_{x_m}([a_1,b_1]\times\dots[a_{m-1},b_{m-1}])}\left|\det \underbrace{(\Phi)'_{x_m}}_{=\partial\Psi/\partial y}\right|\right)\,dx_m \\ &= \int_{a_m}^{b_m}\left(\int_{[a_1,b_1]\times\dots[a_{m-1},b_{m-1}]}\left|\det(\Phi')(?,x_m)\right|\right)\,dx_m \\ &= \int_I \det|\Phi'|\,d\mu. \end{aligned}$$

5.10 Korollar. *Wenn der Transformationssatz 5.3 in Dimension $m-1$ gilt, dann gilt er auch für spezielle Φ wie in Lemma 5.9.*

5.11 Lemma. *Wenn der Transformationssatz 5.3 in Dimension $m-1$ gilt, dann auch in Dimension m.*

Beweis. Es bleibt, die Voraussetzungen von Satz 5.5 für beliebiges $\Phi\colon U\to V$ nachzuweisen. Dazu benötigen wir einen Zerlegungssatz, der sagt, dass lokal jedes Φ in Diffeomorphismen wie in Lemma 5.6 und Lemma 5.9 zerlegt werden kann:

5.12 Lemma. *Zu jedem $x\in U$ existiert eine offene Umgebung W von x und C^1-Diffeomorphismen $\Psi\colon W\to\Psi(W)$, $\omega\colon\Psi(W)\to\omega(\Psi(W))$, so dass $\Phi|_W = \omega\circ\Psi$ und (bis auf Permutation der Variablen)*

$$\Psi(y,x_m) = (\tilde\Phi(y,x_m),x_m);\qquad \omega(y,x_m) = (y, g(y,x_m)),$$

also wie in Lemma 5.9 und in Lemma 5.6. Hierbei definieren wir $\tilde\Phi$ und ϕ als (Zusammenfassung von Komponenten von Φ: $\Phi = (\tilde\Phi,\phi)$).

Beweis. Da $\det\Phi'(x)\neq 0$ kann man durch Permutation der $x_1,\ \dots,\ x_m$ erreichen dass $\det\partial\tilde\Phi(x)/\partial y\neq 0$. Dies folgt aus der Linearen Algebra: wäre der Rang um die letzte Zeile verkleinerten Matrix $\partial Phi(x)/\partial y\leq m-2$, so hatte $\Phi'(x)$ selbst Rang $\leq m-1$, hätte also verschwindende Determinante. Also ist der Rang der Verkleinerten Matrix $m-1$, so dass man $m-1$ Spalten auswählen kann, um eine nicht-singuläre Matrix zu erhalten. Beachte, dass $\partial\phi/\partial y = \tilde\Phi'$.

Für die Abbildung $\Psi(y,x_m) := (\tilde\Phi(y,x_m),x_m)$ gilt $\det\Psi'(x) = \det\tilde\Phi'(x)\neq 0$. Nach dem Satz über lokale Invertierbarkeit ist Ψ auf einer genügend kleinen Umgebung W von x also ein C^1-Diffeomorphismus auf sein (offenes) Bild $\Psi(W)$.

Setze $\omega := \Phi\circ\Psi^{-1}\colon\Psi(W)\to\Phi(W)$. Da Ψ^{-1} und Φ C^1-Diffeomorphismen sind, hat auch ω diese Eigenschaft. Die ersten $m-1$-Koordinaten werden von Ψ genauso abgebildet wie von Φ (so wurde Ψ konstruiert), also läßt $\Phi\circ\Psi^{-1}$ sie fest. Damit hat ω die gewünschte Gestalt. ☐

Wir können nun den Beweis des Satzes zu Ende führen. Sei $I\subset U$ ein kompaktes Interval. Für jeden Punkt $x\in I$ wähle ein W_x und eine Zerlegung von $\Psi|_W$ wie im Zerlegungslemma konstruiert. Wähle ein offenes dyadisches Interval I_x welches x enthält und so dass $\overline{I_x}\subset W$.

Da I kompakt ist, wird I von endlich vielen dieser I_x überdeckt.

Indem man Schnitte bildet, kann man I in endlich viele disjunkte dyadische Teilintervalle zerlegen, so dass jedes Teilinterval in einem W_x enthalten ist.

Für jedes dieser Teilintervall I_k gilt nun nach Induktionsvoraussetzung und Korollar 5.8 und Korollar 5.10

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\Phi(I_k)) = \operatorname{vol}(\omega_k(\Psi_k(I_k))) &= \int_{\Psi_k(I_k)} |\det \omega_k'| \\ &= \int_{I_k} |\det \Psi_k'| \cdot |\det \omega_k'| \\ &= \int_{I_k} |\det(\omega_k' \circ \Psi_k')| = \int_{I_k} |(\det \omega_k \circ \Psi_k)'| \\ &= \int_{I_k} |\det \Phi'| \,.\end{aligned}$$

Bildet man die Summe über die I_k, erhält man, wie gewünscht,

$$\operatorname{vol}(\Phi(I_k)) = \int_{I_k} |\det \Phi'| \,.$$

Es bleibt nur noch, Satz 5.5 zu benutzen, und die Aussage des Lemmas folgt. □

Da der Induktionsanfang $m = 1$ wegen Korollar 5.7 erfüllt ist, gilt per Induktion mit Lemma 5.11 der Transformationssatz 5.3.

6 Mehr zu L^p-Funktionen

Wir wollen zunächst einige der Beweise, die wir nicht vollständig gegeben haben, beenden.

Zur Erinnerung, und mit unserer neuen Sprechweise:

6.1 Bemerkung. $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) = \{f \colon \Omega \to \mathbb{C} \mid \exists k > 0$ so dass $|f| \leq k$ fast überall$\}$., $|f|_\infty = \inf\{k \in [0, \infty]; |f| \leq k$ fast überall$\}$. Die Definition ist also ganz analog der Definition von Beschränktheit, und der Supremums-Norm, nur dass überall der Ausdruck "fast überall" hinzugefügt wird.

Zuerst formulieren wir die Hölder-Ungleichung etwas allgemeiner.

6.2 Satz. *Seien $1 \leq p, q, r \leq \infty$, so dass $1/p + 1/q = 1/r$. Seien $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$. Dass ist $fg \in \mathcal{L}^r(\Omega, \mu)$ und*

$$|fg|_r \leq |f|_p \cdot |g|_q \,.$$

Beweis, insbesondere Rest des Beweises der Hölder-Ungleichung. Wir müssen noch den Fall behandeln, dass $|f|_p = 0$ (der Fall $|g|_q = 0$ geht genauso). Das heißt zunächst, dass $\int_\Omega |f|^p = 0$. Nach Lemma 3.4 ist dann $|f|^p$ fast überall Null, also auch fast überall $|f| = 0$. Und dann auch $|fg| = 0$ fast überall. Dies impliziert wiederum wegen Lemma 3.4 dass $\int |fg| = 0$, also $|fg|_1 = 0$, so dass die Ungleichung erfüllt ist.

Weiterhin fehlt $p = 1$ und $q = \infty$. Sei also $|g| \leq k$ fast überall für eine $k \in [0, \infty)$. Dann gilt fast überall $|fg| \leq k \cdot |f|$. Sei N die entsprechende Nullmenge. Dann gilt

$$|fg|_1 = \int_\Omega |fg| \; d\mu = \int_{\Omega \setminus N} |fg| \leq \int_{\Omega \setminus N} k\,|f| = k\,|f|_1 .$$

Da $|g|_\infty$ das Infimum aller dieser k ist, gilt auch $|fg|_1 \leq |g|_\infty \cdot |f|_1$. □

Beweis. **Beweis, dass $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$ ein Vektorraum ist, und dass $|\cdot|_\infty$ die Dreiecksungleichung (=Minkowski-Ungleichung) erfüllt.**
Seien also $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Seien N_1, N_2 Nullmengen, $k_1, k_2 \in [0, \infty)$ mit $|f| \leq k_1$ ausserhalb N_1 und $|g| \leq k_2$ außerhalb N_2. dann gilt

$$|\lambda f + g| \leq |\lambda|\,|f| + |g| \leq |\lambda|\,k_1 + k_2$$

außerhalb $N_1 \cup N_2$, was nach Lemma 3.3 immer noch eine Nullmenge ist.

Ist $\lambda = 1$, können wir das Infimum über alle so erhältlichen Schranken k_1 und k_2 bilden, und erhalten auf der Rechten Seite $|f|_\infty + |g|_\infty$ (nach Definition von $|f + g|_\infty$ müssen auf der Linken Seite möglicherweise noch kleinere obere Schranken berücksichtigt werden) die Ungleichung

$$|fg|_\infty \leq |f|_\infty + |g|_\infty .$$

□

6.3 Definition. Falls $f = 0$ fast überall, so gilt $|f|_p = 0$, und daher wird im allgemeinen $\mathcal{L}^p(\Omega)$ kein normierter Vektorraum sein.

Wir reparieren dies, indem wir Äquivalenzklassen bilden (einen Quotientenraum).

Zur Erinnerung: $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f \colon \Omega \setminus N \to \mathbb{C} \mid N$ Nullmenge und $|f|_p^p := \int_{\Omega \setminus N} |f|^p\} < \infty\}$.

Definiere nun $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \mid f = 0$ fast überall$\} = \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \mid |f|_p = 0\}$.

Definiere $L^p(\Omega, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)/\mathcal{N}$, mit Norm $|[f]|_p := |f|_p$.

Die Norm ist wohldefiniert, denn falls $[f] = [g]$ dann $f - g \in \mathcal{N}$, d.h. f und g unterscheiden sich nur auf einer Nullmenge, und dann sind die Integrale, welche die Norm definieren, identisch.

Um Schreibarbeit zu sparen, benutzt man für eine Funktion $f \colon \Omega \setminus N \to \mathbb{C}$ oft die Notation $f \in L^p$, anstelle zu schreiben $[f] \in L^p$.

6.4 Satz. *Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\Omega, \mu)$ ein Banachraum.*

Beweis. Nach Definition gilt $|[f]|_p = 0$ genau wenn $|f|_p = 0$, also wenn $f \in \mathcal{N}$, also $[f] = 0 \in L^p = \mathcal{L}^p/\mathcal{N}$.

Die anderen Eigenschaften einer Norm bleiben erhalten, da sie für die Vertreter der Nebenklassen gelten (wichtig ist hier nur, dass $|[f]|_p = |f|_p$ wirklich wohldefiniert ist).

Der entscheidende Punkt ist, zu zeigen dass L^p vollständig ist. Seien also $f_1, f_2, \dots \in L^p$ und

$$\sum |f_k|_p =: M < \infty. \tag{6.5}$$

Falls zunächst $1 \le p < \infty$, dann

$$\left|\left(\sum_{k=1}^n |f_k|\right)^p\right|_1 = \left|\sum_{k=1}^n |f_k|\right|_p^p \le \left(\sum_{k=1}^n |f_k|_p\right)^p \le M^p. \tag{6.6}$$

Dies heißt aber wegen des Satzes über monotone Konvergenz, dass die Funktionenfolge $(\sum |f_k(x)|)^p$ fast überall konvergiert (und nicht divergiert). Also konvergiert auch $\sum |f_k(x)|$ fast überall. In $\mathbb{R}$ folgt aus absoluter Konvergenz die Konvergenz, also konvergiert $\sum_{f_k}(x)$ fast überall gegen eine Funktion $f(x)$ (punktweise).

Es bleibt noch zu zeigen, dass $f \in L^p$ und $|f - \sum_{k=1}^n f_k|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Für das erste beachte $|f|^p \le (\sum |f_k|)^p \in \mathcal{L}^1$ nach (6.5), also $f \in \mathcal{L}^p$.

Weiter gilt, wenn man wie in und nach (6.6) argumentiert

$$\left|f - \sum_{k=1}^n f_k\right|_p = \left|\sum_{k=n+1}^\infty f_k\right|_p \le \sum_{k=n+1}^\infty |f_k|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also folgt die gewünschte Konvergenz.

Falls $p = \infty$, ist per Definition $\sum_{k=1}^\infty |f_k(x)|$ fast überall $\le M = \sum |f_k|_\infty$, also auch $f(x) := \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ fast überall konvergent, und für diese x gilt natürlich $|f(x)| \le \sum_{k=1}^\infty |f_k(x)| \le M$.

Genauso sieht man $\left|f - \sum_{k=1}^{n-1} f_k\right|_\infty = |\sum_{k=n}^\infty f_k|_\infty \le \sum_{k=n}^\infty |f_k|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

Wir benutzten im Beweis von Satz 6.4 folgendes Lemma:

6.7 Lemma. *Ein normierter Vektorraum V ist genau dann vollständig wenn jede absolut konvergente Reihe in V konvergiert, also wenn zu $v_1, \dots \in V$ mit $\sum |v_i| < \infty$ auch $\sum v_i \in V$ existiert.*

Beweis. Sei $x_1, x_2, \dots \in V$ eine Cauchyfolge. Wir müssen zeigen, dass diese Cauchyfolge einen Grenzwert hat. Für $k \in \mathbb{N}$ wähle mit k wachsende $n_k \in \mathbb{N}$ so dass $|x_m - x_n| < 2^{-k-1}$ falls $m, n \ge n_k$. Dann erfüllt die Teilfolge $y_k := x_{n_k}$: $|y_{k+1} - y_k| \le 2^{-k}$.

Definiere nun $h_1 := y_1$ und $h_k := y_k - y_{k-1}$ für $k \ge 2$. Dann gilt $\sum |h_k| = |y_1| + \sum_{k\ge 2} |y_k - y_{k-1}| \le |y_1| + \sum_{k\ge 2} 2^{-k+1} < \infty$. Also existiert $y := \sum_{k=1}^\infty h_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n h_k = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Da y_n eine konvergente Teilfolge der Cauchyfolge x_k ist, ist somit die Cauchyfolge (x_k) selbst konvergent. □

7 Wichtige Sätze aus der Maßtheorie

Jetzt sollen noch ein paar Resultate aus der Maßtheorie zusammengestellt werden, die wir aus Zeitgründen leider nicht beweisen können. Trotzdem halte ich für sinnvoll, von ihrer Existenz schon gehört zu haben.

7.1 L^p-Räume

7.1 Satz. *Für $1 \leq p < \infty$ ist die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$.*

In anderen Worten: $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist die Vervollständigung von $C_c(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der L^p-Norm.

7.2 Satz. *Seien $1 \leq p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Sei Ω ein σ-endlicher Maßraum. Dann liefert die Abbildung*

$$L^p(\Omega) \to \mathrm{Hom}(L^p(\Omega), \mathbb{R}); f \mapsto (g \mapsto \int_\Omega fg)$$

eine isometrische Bijektion zwischen $L^q(\Omega)$ und den beschränkten linearen Abbildungen von $L^p(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$ (mit Operatornorm: $\|\psi\| := \sup_{|f|_p=1} |\psi(f)|$ für $\psi \in \mathcal{B}(L^p(\Omega), \mathbb{R})$).

Schlagwort: der (topologische) Dualraum von L^p ist L^q.

Beweis. Wir wollen wenigstens zeigen, dass wir wirklich ein Element des Dualraums erhalten (mit der Normabschätzung $\|\psi_f\|_{\mathrm{Hom}(L^p,\mathbb{C})} \leq |f|_p$). Dies folgt aber sofort aus der Hölder Ungleichung. □

7.3 Satz. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $p \in [1, \infty)$ ist die Menge $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid f \text{ glatt mit kompaktem Träger}\}$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

f hat kompakten Träger, falls es ein $R > 0$ gibt, so dass $f(x) = 0$ für $x > R$ (äquivalent: die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ hat einen kompakten Abschluß). "Dicht" heißt, dass jede L^p Grenzwert (in L^p) einer Folge von Elementen aus C_c^∞ ist.

Beweis. Mittels Faltung mit "Glattmacher" wie auf Aufgabe 4 von Woche 8. □

7.2 Satz von Radon-Nykodim

7.4 Satz. *Sei $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, und sei λ ein weiteres Maß auf $\mathfrak{M}$.*

Dann gibt es eindeutige Maße λ_a und λ_s auf $\mathfrak{M}$, so dass

$$\lambda(E) = \lambda_a(E) + \lambda_s(E) \qquad \forall E \in \mathfrak{M}$$
$$\lambda_a(E) = 0 \qquad \forall E \in \mathfrak{M} \text{ mit } \mu(E) = 0$$
$$\exists N \in \mathfrak{M} \text{ mit } \mu(N) = 0, \qquad \text{so dass } \lambda(\Omega \setminus E) = 0.$$

Außerdem gibt es eine (eindeutige) Funktion $h \in L^1(\Omega, \mu)$, so dass

$$\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu \qquad \forall E \in \mathfrak{M}.$$

Es gilt $h(x) \geq 0$ für (μ-fast) alle $x \in \Omega$.

7.5 Bemerkung. Man kann auch komplexwertige Maße einführen (es wird einer Menge also eine komplexe Zahl zugeordnet, die nicht notwenigerweise positiv ist, ansonsten bleiben die Eigenschaften wie bei den gewöhnlichen Maßen erhalten). Der Satz gilt dann genauso, wobei h dann beliebige Funktion aus $L^1(\mu)$ sein kann.

7.3 Der Rieszsche Darstellungssatz

7.6 Satz. *Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum (d.h. jeder Punkt in X hat eine offene Umgebung, deren Abschluss kompakt ist, und zu je zwei Punkten $x \neq y \in X$ gibt es disjunkte offene Umgebungen).*

Sei $C_c(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f$ stetig mit kompaktem Träger$\}$. Hierbei ist der Träger einer Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ der Abschluss von $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

Vereinfachung: X kompakter Hausdorffraum, dann gilt $C_0(X) = C(X)$.

Sei $\phi : C_0(X) \to \mathbb{C}$ linear, außerdem gelte $\phi(f) \geq 0$ falls $f \geq 0$ (überall) (dann heißt ϕ positiv*).*

Dann gibt es einen vollständigen Maßraum $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, wobei $\mathfrak{M}$ alle Borelmengen enthält, so dass

$$\phi(f) = \int_X f\, d\mu \qquad \forall f \in C_0(X).$$

Außerdem hat μ die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\mu(K) &< \infty && \text{für jede kompakte Teilmenge } K \subset X.\\
\mu(E) &= \inf\{\mu(V) \mid E \subset V,\ V \text{ offen}\} && \forall E \in \mathfrak{M}.\\
\mu(E) &= \sup\{\mu(K) \mid K \subset E,\ K \text{ kompakt}\} && \text{falls } E \text{ offen oder } \mu(E) < \infty.
\end{aligned}$$

Teil II
Differentialformen bis Gauß und Stokes

8 Eingebettete Mannigfaltigkeiten

8.1 Definition. Eine (eingebettete) glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}^N$ mit folgenden Eigenschaften:

Für jedes $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $x \in \overline{U} \subset \mathbb{R}^N$, eine weitere offene Teilmenge $\overline{V} \subset \mathbb{R}^N$ und ein C^∞-Diffeomorphismus

$$\overline{\Psi} : \overline{U} \to \overline{V},$$

so dass mit $U := \overline{U} \cap M$ und $V := \Psi(U)$ gilt: V ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$.

Erinnerung: $\overline{\Psi}$ heißt *Diffeomorphismus* wenn die Abbildung bijektiv ist, und sowohl $\overline{\Psi}$ als auch die Umkehrung C^∞-Funktionen sind (also beliebig oft partiell differenzierbar).

8.2 Bemerkung. Die wichtigsten Daten sind die Abbildungen $\Psi := \overline{\Psi}| : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^n$, diese heißen die Karten (oder lokalen Koordinaten) von M.

8.3 Bemerkung. Anstelle glatter ($=C^\infty$) Mannigfaltigkeiten könnte man auch C^k-Mannigfaltigkeiten für $k = 0, \dots, \infty$ betrachten. Der Fall $k = 0$ (ohne Differenzierbarkeit) ist ein Sonderfall. Für $k \geq 1$ verallgemeinern sich die meisten unserer Konstruktionen und Sätze sinngemäß (natürlich muss in Voraussetzungen und Folgerungen C^∞ durch die geeignete Differentiationsordnung ersetzt werden).

8.4 Definition. Seien $\psi_1 \colon U_1 \to V_1$ und $\psi_2 \colon U_2 \to V_2$ Karten von M (mit zugehörigen $\overline{\Psi}_i$). Setze $U_{12} := U_1 \cap U_2$, $V_1' := \Psi_1(U_{12})$, $V_2' := \Psi_2(U_{12})$ (entsprechend $\overline{V}_1'$ etc.). Die (eingeschränkten) Abbildungen

$$\Psi_2 \circ \Psi_1^{-1} \colon V_1' \xrightarrow{\Psi_1^{-1}} U_{12} \xrightarrow{\Psi_2} V_2'$$

(und entsprechend $\overline{\Psi_2 \Psi_1}^{-1} \colon \overline{V}_1' \to \overline{V_2}'$) heißen *Kartenwechsel* oder *Koordinatenwechsel*.

8.5 Beispiel. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist glatte eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dazu müssen wir geeignete Karten angeben. Für $k \in \{1, \dots, n+1\}$ und $\epsilon \in \{\pm 1\}$ setze $\overline{U}_{k,\epsilon} := \{y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_k \cdot \epsilon > 0\}$. Definiere

$$\overline{\psi}_{k,\epsilon} \colon U_{k,\epsilon} \to \mathbb{R}^{n+1}; y \mapsto (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_{n+1}, y_1^2 + \dots + \dots y_{n+1}^2 - 1).$$

Dann ist $U_{k,\epsilon}$ offen und $\psi_{k,\epsilon}$ injektiv (das Vorzeichen von y_k ist ja durch ϵ festgelegt). $\overline{\Psi}_{k,\epsilon}$ ist diffbar und die Jakobimatrix $D\overline{\Psi}_{k,\epsilon}$ hat Determinante $2y_k$, ist also auf ganz $\overline{U}_{k,\epsilon}$ invertierbar. Nach dem Satz über die lokale Umkehrfunktion ist die Bildmenge offen, und die Umkehrfunktion (existiert global, da $\overline{\Psi}$ injektiv ist) ist diffbar, also ist $\overline{\Psi}_{k,\epsilon}$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild.

Außerdem wird $S^n \cap U_{k,\epsilon}$ nach $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ abgebildet. Zuletzt beachte noch, dass für jeden Punkt $x \in S^n$ mindestens eine Koordinate $x_k \neq 0$ ist, und somit entweder $x \in U_{k,1}$ oder in $U_{k,-1}$. Man hat also für jeden Punkt eine Karte gefunden.

Leider ist es sehr mühsam, auf diese Weise glatte Mannigfaltigkeiten zu konstruieren: es macht einfach zu viel Arbeit, die Koordinatenfunktionen hinzuschreiben. In vielen Fällen hilft folgender Satz.

8.6 Satz. *Sei $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ glatt. Sei $v \in \mathbb{R}^k$ und es gelte dass für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ mit $f(x) = v$ die Ableitung $Df_x \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ surjektiv ist (d.h. die Jakobi-Matrix hat Rank k, den maximal möglichen Rang).*

Dann ist $f^{-1}(v) \subset \mathbb{R}^N$ ein glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $N - k$.

Beweis. Sei $x \in f^{-1}(v)$. Nachdem man ggf die Koordinaten umbenannt hat, gilt $(\partial f / \partial y_2)_x$ ist invertierbar (da der Rang ja k war). Hier schreiben wir $(x_1, \dots, x_N) = (y_1, y_2)$ mit $y_1 = (x_1, \dots x_{N-k})$, $y_2 = (y_{N-k+}, \dots, y_N)$.

Definiere nun $F \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ durch $F(y_1, y_2) := (y_1, f(y_1, y_2) - v)$. Dann ist für jedes $(y_1, y_2) \in f^{-1}(v)$ $F(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{N-k} \times \{0\}$. Außerdem ist $DF_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial f/\partial y_1 & \partial f/\partial y_2 \end{pmatrix}$ also (da $\partial f / \partial y_2$ an x invertierbar ist) an x invertierbar. Nach dem Satz über die lokale Umkehrfunktion ist F, eingeschränkt auf eine genügend kleine offene Umgebung von x ein Diffeomorphismus auf eine offene Bildmenge. Das ist genau das, was wir zeigen müssen. □

8.7 Beispiel. Sei $f \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}; x \mapsto |x|_2^2$. Es gilt $S^n = f^{-1}(1)$, und $Df_x = (2x_1, \dots, 2x_{n+1})$. Df_x hat also immer Rang 1, außer wenn $x = 0$ (aber dann gilt $f(x) = 0 \neq 1$). Somit folgt aus Satz 8.6, dass S^n eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

8.8 Bemerkung. Wenn man den Satz über lokale Extreme unter Nebenbedingungen anschaut, sieht man also mit Satz 8.6, dass die dort betrachteten

Mengen genau glatte eingebettete Mannigfaltigkeiten sind (kleine Abweichung: es war von der definierenden Funktion nicht verlangt, dass sie glatt ist, sondern nur, dass sie einmal stetig differenzierbar ist).

8.9 Beispiel. Die *orthogonale Gruppe* $O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^*A = 1\}$ ist eine glatte eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$.

Beweis. Übungsaufgabe. Die relevante Abbildung $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2-n(n-1)/2}$ bildet die Matrix A ab auf die Einträge oberhalb und auf der Diagonalen von A^*A (da A^*A symmetrisch ist, kann man die Einträge von A^*A unterhalb der Diagonalen aus denen oberhalb wiedergewinnen). □

8.1 Tangentialraum

8.10 Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ glatte eingebettete n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $x \in M$. Sei $\overline{\Psi}\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^N$ Karte (mit $x \in \overline{U}$). Wir definieren den *Tangentialraum zu M bei x* als

$$T_xM := (D_x\overline{\Psi})^{-1}(\mathbb{R}^n \oplus 0) \subset \mathbb{R}^N\}.$$

Dies ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^N$, den wir als lineare Approximation zu M bei x auffassen wollen. Er hängt nicht von der Wahl der Karte ab.

Definiere

$$TM := \bigcup_{x\in M} T_xM \times \{x\} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Dies ist das *Tangentialbündel* von M.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass T_xM wirklich nicht von der Wahl der Karte abhängt. Sei also $\overline{\Psi}_2\colon \overline{U}_2 \to \mathbb{R}^N$ eine zweite Karte bei x; die Bildbereiche seinen $\overline{V}$ für $\overline{\Psi}$ und $\overline{V}_2$ für $\overline{\Psi}_2$. Dann ist $\overline{\Psi}_2 \circ (\overline{\Psi})^{-1}\colon \overline{V} \to \overline{V}_2$ der Koordinatenwechsel. Zerlegen wir die Elemente von $\overline{V}$ und $\overline{V}_2$ entsprechend $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{N-m}$, so wird $(y,0)$ auf $(*,0)$ abgebildet, und daher

$$(D_x\overline{\Psi}_2) \circ (D_x\overline{\Psi})^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Somit $(D_x\overline{\Psi}_2)^{-1}(\mathbb{R}^m \oplus 0) = (D_x\overline{\Psi})^{-1}(\mathbb{R}^m \oplus \{0\}) = T_xM$. □

8.11 Bemerkung. In Zeichnungen wird der Tangentialraum oft affin verschoben am Punkt x angesetzt. Es ist aber wichtig, zu beachten, dass es sich um einen Vektorraum handelt.

Die einzelnen T_xM hängen "stetig von $x \in M$ ab"; präziser: TM ist selbst eine Mannigfaltigkeit, also ein "guter" Raum.

8.12 Lemma. *Sei $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m}$ eine glatte Abbildung und $0 \in \mathbb{R}^{N-m}$ ein regulärer Wert (zur Erinnerung: D_xf ist surjektiv für jedes $x \in M := f^{-1}(0)$). Dann ist $M = f^{-1}(0)$ eine glatte Mannigfaltigkeit, und*

$$T_xM = \{v \in \mathbb{R}^N \mid D_xf(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^N \mid v \perp \operatorname{grad} f_i(x) \text{ für } i = 1,\dots,N-m\}.$$

8.13 Lemma. *TM ist selbst eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $2\dim(M)$.*

Beweis. Falls $\overline{\Psi}\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^N$ Karte von M bei x, so ist

$$D\overline{\Psi} \times \overline{\Psi}\colon \mathbb{R}^N \times \overline{U} \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N;\ (v,x) \mapsto (D_x\overline{\Psi}(v), \overline{\Psi}(x))$$

Karte von TM. Genaugenommen muss man noch ein paar Koordinaten im Bildbereich permutieren, damit TM genau auf $\mathbb{R}^n \times V \times \{0\}$ abgebildet wird (so ist das Bild von $TM \cap (\mathbb{R}^N \times \overline{U})$ gerade $(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \times (V \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$). □

8.14 Bemerkung. Wäre M nur eine C^k-Mannigfaltigkeit, wäre TM eine C^{k-1}-Mannigfaltigkeit, da $D_x\overline{\Psi}$ einmal weniger (nach x) ableitbar ist.

8.2 Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

8.15 Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}^N$ eine beliebige Menge. $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ heißt *glatt*, falls es eine offene Umgebung $A \subset U \subset \mathbb{R}^N$ und eine Fortsetzung $\overline{f}\colon U \to \mathbb{R}^n$ von f gibt, welche glatt ist (Fortsetzung hieß: $\overline{f}|_A = f$).

8.16 Lemma. *Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ offen, betrachte $A \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k + m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$.*
Dann ist $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ glatt (im bisherigen Sinn) genau dann wenn $f \times \{0\}\colon A \times \{0\} \to \mathbb{R}^n; (x,0) \mapsto f(x)$ glatt ist im neuen Sinn.

Beweis. Für die Glattheit im alten Sinn muss man weniger partielle Ableitungen berechnen als für die Glattheit im neuen Sinn, also folgt aus glatt im neuen Sinn glatt im alten Sinn.

Ist umgekehrt $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ glatt, so definiert $\tilde{f}\colon A \times \mathbb{R}^m; (x,y) \mapsto f(x)$ eine glatte Fortsetzung (konstant in den zusätzlichen Koordinaten). □

8.17 Lemma. *l Seien M^m, N^n glatte eingebettete Mannigfaltigkeiten. $f\colon M \to N$ ist glatt genau dann wenn*

$$\Phi \circ f \circ \Psi^{-1}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

glatt ist für alle Karten Ψ von N und Φ von M (als Definitionsbereich von $\Phi \circ f \circ \Psi^{-1}$ ist natürlich die offensichtliche offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ zu wählen, auf welcher die Abbildung definiert ist).

Beweis. Verwende Lemma 8.16. □

8.18 Bemerkung. Um festzustellen, ob f glatt ist haben wir also zwei Möglichkeiten: wir betrachten M und N als (nicht-offenen) Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ und benutzen die Definition von "glatt" für Abbildungen zwischen solchen Teilmengen.

Alternativ können wir die Karten benutzten, um ganz normale Abbildungen auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ (nach $\mathbb{R}^m$) zu analysieren.

8.19 Definition. Sei $f\colon M \to N$ glatt. Die *Ableitung*

$$Df\colon TM \to TN; (v,x) \mapsto D_x f(v)$$

ist für $x \in M$ mit Karten $\Psi\colon U \to V$ ($x \in U \subset M$, $V \subset \mathbb{R}^m$) und $\Phi\colon U_2 \to V_2$ ($f(x) \in U_2 \subset N$, $V_2 \subset \mathbb{R}^n$) definiert durch

$$D_x f(v) = (D_{f(x)}\overline{\Phi})^{-1}\left(D_{\Psi(x)}(\Phi \circ f \circ \Psi^{-1})(D_x\overline{\Psi}(v))\right).$$

Df hängt nicht von der Wahl der Karten ab.

Zum Prinzip: aus f macht man lokal mittels der Karten eine Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$, deren Ableitung definiert ist.

Diese Ableitung kann man dann verwenden, wenn man außerdem die Differentiale $D\overline{\phi}$ und $D\overline{\Psi}$ benutzt, um T_xM bzw. $T_{f(x)}N$ mit $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ zu identifizieren.

Falls $M \subset \mathbb{R}^{N_1}$ und $N \subset \mathbb{R}^{N_2}$ und $F\colon W \to N$ eine glatte Ausdehnung von f auf eine offene Umgebung W von $M \subset \mathbb{R}^{N_1}$ ist, so ist

$$D_xf = D_xF|_{T_xM}$$

(D_xF ist eine lineare Abbildung $D_xF\colon \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$, diese schränken wir auf $T_xM \subset \mathbb{R}^{N_1}$ ein). Diese Einschränkung ist insbesondere unabhängig von der speziellen Wahl der Fortsetzung F.

8.20 Bemerkung. D_xf ist die bestmögliche Approximation an f durch eine lineare Abbildung. Um dieser Aussage für eine (ja gekrümmte) Mannigfaltigkeit Sinn geben zu können, mußten wir im ersten Schritt die Mannigfaltigkeiten M und N an den relevanten Punkten x und $f(x)$ durch die Vektorräume T_xM und $T_{f(x)}N$ approximieren. Danach erst kann man die lineare Approximation, jetzt als lineare Abbildung D_xf zwischen T_xM und $T_{f(x)}N$, definieren.

Beweis der Aussagen in Definition 8.19. Die Unabhängigkeit von der Wahl von Karten folgt, wenn die zweite Formel gilt (da F nicht von der Wahl der Karten abhängt).

Sei also F solch eine Fortsetzung. Dann ist $\overline{\Phi}\circ F\circ\overline{\Psi}^{-1}$ eine Fortsetung der auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^{n_1}$ definierten Funktion $\Phi\circ f\circ\Psi^{-1}$ auf eine entsprechende offene Teilemenge von $\mathbb{R}^{N_1}$ (hierbei ist $\mathbb{R}^{n_1} = \mathbb{R}^{n_1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{N_1}$). Folglich gilt

$$D_xF = D_{f(x)}\overline{\Phi}^{-1} D_{\Psi(x)}(\overline{\Phi} \circ F \circ \overline{\Psi}^{-1}) D_x\overline{\Psi}$$

Nun gilt nach Definition von T_xM, dass $D_x\overline{\Psi}(TM) = \mathbb{R}^{n_1} \times \{0\}$. Außerdem bildet $\overline{\Phi} \circ F \circ \overline{\Psi}^{-1}$ $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ auf $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ ab (als Abbildung $\Phi \circ f \circ \Psi^{-1}$), also hat die Ableitung bezüglich der Zerlegung $\mathbb{R}^{N_1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N_1-m}$ "untere Dreiecksgestalt", und der obere linke Matrixeintrag ist gerade $D_{\Psi(x)}(\Phi \circ f \circ \Psi)$. Da die Ableitungsmatrix obere Dreiecksgestalt hat, wird ein Vektor aus $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ auf einen Vektor aus $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ abgebildet. Diese werden wiederum von $D_{f(x)}\overline{\Psi}^{-1}$ auf $T_{f(x)}N \subset \mathbb{R}^{N_2}$ abgebildet. Wir haben also gesehen:

$$D_xF(v) = (D_{f(x)}\overline{\Phi})^{-1}\left(D_{\Psi(x)}(\Phi \circ f \circ \Psi)(D_x\overline{\Psi}(v))\right).$$

Ähnlich ist auch ein direkter Beweis für die Unabhängikeit von den Karten möglich; wie er in Betrachtungen über Mannigfaltigkeiten sehr typisch ist.

Seinen also ψ_2 und ϕ_2 weitere Karten. Dann gilt, wegen der Kettenregel,

$$
\begin{aligned}
&(D_{f(x)}\overline{\Phi})^{-1}\left(D_{\Psi(x)}(\Phi\circ f\circ\Psi^{-1})(D_x\overline{\Psi}(v))\right)\\
&=(D_{f(x)}\overline{\Phi})^{-1}\left(D_{\Psi(x)}(\Phi\circ\Phi_2^{-1}\Phi_2\circ f\circ\Psi_2^{-1}\Psi_2\circ\Psi^{-1})(D_x\overline{\Psi}(v))\right)\\
&=(D_{\Phi(f(x))}\overline{\Phi}^{-1})\left(D_{\Phi_2(f(x))}(\Phi\circ\Phi_2^{-1})D_{\Psi_2(x)}(\Phi_2\circ f\circ\Psi_2^{-1})D_{\Psi(x)}(\Psi_2\circ\Psi^{-1})(D_x\overline{\Psi}(v))\right)\\
&=(D_{\Phi(f(x))}\overline{\Phi}^{-1})\left(D_{\Phi_2(f(x))}(\overline{\Phi}\circ\overline{\Phi}_2^{-1})D_{\Psi_2(x)}(\Phi_2\circ f\circ\Psi_2^{-1})D_{\Psi(x)}(\overline{\Psi}_2\circ\overline{\Psi}^{-1})(D_x\overline{\Psi}(v))\right)\\
&=(D_{(f(x))}(\overline{\Phi}^{-1}\overline{\Phi}))\left(D_{\Phi_2(f(x))}(\overline{\Phi}_2^{-1})D_{\Psi_2(x)}(\Phi_2\circ f\circ\Psi_2^{-1})D_{\Psi_2(x)}(\overline{\Psi}_2)(D_x(\overline{\Psi}^{-1}\overline{\Psi})(v))\right)\\
&=D_{\Phi_2(f(x))}(\overline{\Phi}_2^{-1})\left(D_{\Psi_2(x)}(\Phi_2\circ f\circ\Psi_2^{-1})D_{\Psi_2(x)}(\overline{\Psi}_2)(v)\right)
\end{aligned}
$$

□

8.21 Lemma. *Sei $f\colon M\to N$ glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Dann ist $Df\colon TM\to TN$ ebenfalls glatt.*

Beweis. Entscheidend ist natürlich, dass D_xf glatt von x abhängt.

Genauer ist ja wegen $D_xf = D_xF|_{T_xM}$ für jede Fortsetzung von f auf eine offene Teilmenge W von M in $\mathbb{R}^{N_1}$ die Abbildung Df die Einschränkung von $DF\colon\mathbb{R}^{N_1}\times W$ auf die Teilmenge $TM\subset\mathbb{R}^{N_1}\times W$.

Da F eine C^∞ Abbildung ist, gilt dies auch für seine Ableitung DF. Es gilt ja

$$DF(v,p)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j=1,\dots,N_1}\cdot v,$$

somit ist jede Koordinatenfunktion glatte Funktion aller Einträge p,v. □

8.22 Definition. Eine glatte Abbildung $f\colon M\to N$ heißt *Diffeomorphismus* und die beiden Mannigfaltigkeiten *diffeomorph*, falls f bijektiv und auch die Umkehrabbildung f^{-1} glatt ist.

9 Abstrakte Mannigfaltigkeiten

9.1 Definition. Eine glatte Mannigfaltigkeit ist

(1) Ein topologischer Raum M, so dass die Topologie folgende Eingenschaften hat:

   (a) falls $x\neq y\in M$, gibt es offene Umgebungen $U_x\ni x$, $U_y\ni y$ mit $U_x\cap U_y=\emptyset$ (dann heißt M hausdorffsch).

   (b) Es gibt eine abzählbare Teilmenge $A\subset M$, so dass $\overline{A}=M$, wobei $\overline{A}$ der Abschluß von A ist.

(2) zusammen mit einer offenen Überdeckung U_i von M und mit Homöomorphismen $\Phi_i\colon U_i\to V_i\subset\mathbb{R}^m$, den sogenannten *Karten* von M, so dass

$$\Phi_i\circ\Phi_j^{-1}\colon V_j\cap\Phi_j(U_i)\to\mathbb{R}^m$$

eine C^∞-Abbildung zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ ist für alle i,j. Zur Erinnerung: ein Homöomorphismus ist eine Abbildung, die stetig und bijektiv ist, und deren Umkehrung ebenfalls stetig ist.

9.2 Bemerkung. Wir haben schon gesehen, dass wir unsere eingebetteten Mannigfaltigkeiten mit der Struktur einer abstrakten glatten Mannigfaltigkeit versehen können, indem wir die nach Voraussetzung existierenden Karten benutzen (aber die Einbettung in $\mathbb{R}^N$ "vergessen").

9.3 Satz. *Sei M eine abstrakte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es (für genügend großes $N \in \mathbb{N}$) eine eingebettete Mannigfaltigkeit $M' \subset \mathbb{R}^N$ welche diffeomorph zu M ist.*

9.4 Bemerkung. Wegen dieses Satzes ist es nicht unbedingt notwendig, auch abstrakte Mannigfaltigkeiten zu betrachten. Für einige Konstruktionen ist dies allerdings viel bequemer, da man oft keine Einbettung nach $\mathbb{R}^N$ "sieht".

Beweis. In der Vorlesung soll aus Zeitgründen dieser Satz nicht bewiesen werden. Beweise findet man in Topologiebüchern, z.B. [2]. □

10 Differentialformen

Wir wollen uns nun dem Ziel zuwenden, die Integration auf Mannigfaltigkeiten zu definieren. Aus dem ersten Teil der Vorlesung liegt es nahe, zunächst ein Maß auf der Mannigfaltigkeit zu konstruieren, und danach unsere Integrationstheorie aufzubauen.

Problem ist, dass man (zumindest bei abstrakten Mannigfaltigkeiten) keine kanonische Konstruktion eines Maßes kennt.

Der "Ausweg" ist, dass wir nicht über Funktionen integrieren wollen, sondern über modifizierte Funktionen, sogenannte Dichten, in die in gewissem Sinne das Maß schon eingebaut ist.

Zur Erinnerung: beim Integrieren im $\mathbb{R}^n$ schreiben wir (in Anlehnung an Fubini) oft

$$\int_U \underbrace{f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n}_{\text{neuer Integrand}}$$

Hauptsächlich handelt es sich hier natürlich um eine Umformulierung: gegeben solch eine Dichte, könnte man (allerdings nicht auf eindeutige Weise) ein Maß und eine Funktion konstruieren, so dass das Integral über die Dichte dem Integral über die Funktion bezüglich des vorgegebenen Maßes entspricht.

Mehr noch, mittels Karten kann man dieses Integral auf das gewöhnliche Integrieren im $\mathbb{R}^m$ zurückführen. Trotzdem ist die neue Notation (wenn auch zunächst eine Hürde) sinnvoll, da viele Sachverhalte dadurch viel kompakter und dadurch besser manipulierbar dargestellt werden können. (Für konkrete Rechnungen muss man dann allerdings doch noch wissen, wie man die Übersetzung zur Integration im $\mathbb{R}^m$ durchführen kann).

Um die Dichten zu definieren, gehen wir einen kleinen Umweg und beschäftigen uns zunächst mit Differentialformen.

10.1 Definition. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (z.B. $V = T_xM$ für eine Mannigfaltigkeit M und $x \in M$). Eine *alternierende k-Form* auf V ist eine Abbildung

$$\omega \colon V^k \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) ω ist linear in jedem der k-Einträge, d.h. ω ist *k-linear*.

(2) ω ist alternierend, d.h. vertauscht man genau zwei Einträge, so muss man den Wert mit -1 multiplizieren, also $\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega_x(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$.

Beachte, dass die Menge der alternierenden k-Formen selbst wieder ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist (durch punktweise Addition und Skalarmultiplikation).

Ersetzt man die Zielmenge $\mathbb{R}$ durch den ($\mathbb{R}$-Vektorraum) $\mathbb{C}$, erhält man bei ansonsten gleicher Definition die sogenannten *komplexwertigen alternierenden k-Formen* auf V.

10.2 Beispiel. Eine 1-Form auf V ist einfach eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{R}$.

10.3 Definition. Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine k-Form (Differentialform der Ordnung k) ω auf M ist eine Kollektion von Abbildungen

$$\omega_x \colon T_x M^k \to \mathbb{R}, \qquad x \in M$$

so dass ω_x für jedes $x \in M$ eine alternierende k-Form ist. Für $k = 0$ definiert man, dass eine 0-Form eine Funktion $\omega \colon M \to \mathbb{R}$ ist.

Sei $f \colon N \to M$ eine glatte Abbildung und ω eine k-Form auf M. Definiere die *zurückgezogene k-Form $f^*\omega$* auf N durch

$$f^*\omega_y(w_1, \ldots, w_k) := \omega(D_{f(y)} f(w_1), \ldots, D_{f(y)} f(w_k)).$$

Falls $k = 0$, ist $f^*\omega(y) = f^*\omega_y = \omega(f(y))$.

Eine k-Form ω auf M heißt *glatt*, falls für jede Karte $\phi \colon U \to V \subset \mathbb{R}^m$ gilt, dass alle Funktionen

$$V \to \mathbb{R}; x \mapsto (\phi^{-1})^* \omega_x(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

glatte Funktionen sind. Diese Funktionen nennen wir *Koeffizientenfunktionen*. Hierbei sind e_i die Standard-Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^m$.

Die Menge der glatten k-Formen auf M wird mit $\Omega^k(M)$ bezeichnet.

Ersetzt man in der Definition die Zielmenge $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$, ist also ω_x eine komplexwertige k-Form auf $T_x M$, so erhält man die komplexwertigen k-Formen $\Omega^k(M; \mathbb{C})$.

Durch Punktweise Addition und Skalarmultiplikation wird $\Omega^k(M)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und $\Omega^k(M; \mathbb{C})$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

10.4 Beispiel. Auf $\mathbb{R}^m$ definieren wir glatte 1-Formen dx_i durch

$$dx_i(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) := \lambda_i,$$

wobei e_i die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^m = T_x \mathbb{R}^m$ für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ sind.

Eine beliebige glatte 1-Form hat dann die Gestalt

$$\omega_x = \sum_{i=1}^m f_i(x) dx_i,$$

wobei $f_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen sind.

Beweis. Da $T_x\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$, und da die angegebenen dx_i und ω_x offenbar lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ sind (also k-linear für $k = 1$), handelt es sich um 1-Formen. Nach Einsetzen von e_i sind diese glatt, es handelt sich also um glatte 1-Formen (wegen Lemma 10.7 braucht man keine weiteren Karten zu betrachten).

Ist umgekehrt ω eine beliebige glatte 1-Form, so gilt

$$\omega_x = \sum_{i=1}^{m} \omega_x(e_i)dx_i,$$

wie man sofort durch Einsetzen von Tangentialvektoren erkennt (unter Ausnutzung, dass die e_i eine Basis von $\mathbb{R}^m = T_x\mathbb{R}^m$ bilden). $\square$

10.5 Lemma. *Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to W$ glatte Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, und $\omega \in \Omega^k(W)$. Dann gilt*

$$f^*(g^*\omega) = (g \circ f)^*\omega.$$

Falls $N = W$ und $g = \mathrm{id}$, so gilt $\mathrm{id}^*\omega = \omega$.

Beweis. Dies folgt aus der Kettenregel für Differentiale: $D(g \circ f) = Dg \cdot Df$, indem man in die Definition der zurückgezogenen Formen einsetzt. Für $\mathrm{id}^*\omega = \omega$ benutze man, dass $D\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$. $\square$

10.6 Lemma. *Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und $u\colon M \to \mathbb{R}$ glatt. Dann gilt $d(f^*u) = f^*(du)$.*

Beweis. Per Definition ist $f^*u(y) = u(f(y))$, also $d(f^*u)_u(v) = D_y(u \circ f)(v)$ für $y \in M$ und $v \in T_yM$.

Andererseits gilt $f^*(du)_y(v) = du_{f(y)}(D_yf(v)) = D_{f(y)}u(D_yf(v))$. Nach Kettenregel ist dies aber gerade $D_y(u \circ f)(v)$. $\square$

10.7 Lemma. *Glattheit bleibt bei Kartenwechsel erhalten, d.h. muss nur für eine Überdeckung durch Karten nachgewiesen werden, und folgt dann für alle weiteren Karten.*

Beweis. Seien dazu $\phi_1, \phi_2\colon U \to \mathbb{R}^m$ zwei Karten (durch Schneiden können wir annehmen, dass sie dasselbe Definitionsgebiet haben, die Wertemengen können allerdings verschieden sein).

Dann gilt (mit $y = \phi_1^{-1}(x)$)

$$\begin{aligned}(\phi_1^{-1})^*\omega_x(v_1,\dots,v_k) &= \omega_y((D_x\phi_1^{-1})(v_1),\dots,(D_x\phi_1^{-1})(v_k))\\ &= \omega_y((D_y\phi_2)^{-1}D_x(\phi_2\phi_1^{-1})(v_1),\dots,(D_y\phi_2)^{-1}D_x(\phi_2\phi_1^{-1})(v_k))\\ &= (\phi_2^{-1})^*\omega_{\phi_2(\phi_1^{-1}(x))}(D_x(\phi_2\phi_1^{-1})v_1,\dots,D_x(\phi_2\phi_1^{-1})v_k)\end{aligned}$$

Nun kann man für die v_j irgendwelche Standard-Basisvektoren einsetzen, und beachte, dass $D_x\phi_2\phi_1^{-1}(e_i) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\phi_2\phi_1^{-1})_i}{\partial x_j}(x) \cdot e_j$. All diese Funktionen sind glatte reellwertige Funktionen. Die Multilinearität impliziert, dass $(\phi_1^{-1})^*\omega_x(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$ eine Linearkombination der Funktionen $(\phi_2^{-1})^*\omega_{\phi_2\phi_1^{-1}(x)}(e_{\alpha_1},\dots,e_{\alpha_k})$ ist, wobei die Koeffizienten die oben gewonnenen glatten reellwertigen Funktionen sind. Man erhält also $(\phi_1^{-1})^*\omega_x(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$ durch Multiplikation mit glatten Funktionen und durch Komposition mit der glatten Funktion $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ aus den entsprechenden $(\phi_2^{-1})^*\omega_y(e_{\alpha_1},\dots,e_{\alpha_k})$. Sind letztere C^∞, folgt also, dass erstere auch C^∞ sind. $\square$

10.8 Bemerkung. Im Beweis von Lemma 10.7 haben wir auch gleich eine Formel hergeleitet (allerdings genügend kompliziert und nicht ganz vollständig hingeschrieben) wie man die Koeffizientenfunktionen für verschiedene Karten ineinander umrechnet. Diese Formeln werden *Transformationsformeln* genannt. Insbesondere in Physikbüchern wird hiermit viel gearbeitet, hieraus stammt auch der Begriff "Transformiert sich wie ...", wobei man für die Pünktchen dann (Tangential)vektor oder k-Form (oder noch anderes) einsetzen kann.

10.9 Beispiel. Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann definiert die Ableitung Df eine 1-Form df auf folgende Weise: eigentlich haben wir die linearen Abbildungen $D_x f\colon T_x M \to T_{f(x)}\mathbb{R}$. Allerdings ist (per Definition) $T_{f(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$, und wir definieren $df_x(v) := D_x f(v) \in \mathbb{R}$ für $v \in T_x M$.

Wichtige: dies gilt auch, falls $M = \mathbb{R}^m$. Die Ableitung $D_x f$ ist also, wenn man es richtig macht, eine lineare Abbildung von $T_x\mathbb{R}^m$ (zufällig wieder $\mathbb{R}^m$) nach $\mathbb{R}$. Es handelt sich um keinen (Tangential)vektor. Wollen wir einen solchen daraus produzieren (den Gradienten), müssen wir erst die Transponierte bilden.

10.10 Beispiel. Betrachte die Funktion $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}; (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$. Dann gilt $\partial f_i / \partial x_j = \delta_{ij}$, mit $\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$, und sonst $\delta_{ij} = 0$.

Wir erhalten also $df_i(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j) = \lambda_i$. Somit $df_i = dx_i$.

Die Funktion f_i wird (aus naheliegenden Gründen) oft auch x_i genannt, daher also der Name dx_i.

Für beliebiges $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ erhält man

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i.$$

Beweis. Nur die letzte Formel ist zu beweisen. Es gilt $D_x f(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Genau der gleiche Wert ergibt sich auf der linken Seite. Da die e_i eine Basis von $T_x\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ bilden, folgt dass die beiden Formen übereinstimmen. □

Wir wollen als nächstes zeigen, wie man beliebige k-Formen aus 1-Formen zusammensetzen kann (das sind ja die einzigen, die wir bisher kennen). Dazu wollen wir Differentialformen multiplizieren.

10.11 Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, ω eine k-Form und η ein q-Form. Wir definieren eine $k+q$-Form $\omega \wedge \eta$ auf folgende Weise:

$$\omega\wedge\eta(v_1, \dots, v_{k+q}) := \frac{1}{k! \cdot q!} \sum_{\sigma \in S_{k+q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+q)})$$

Die Definition muss so kompliziert sein, da wir ja wieder eine (alternierende!) $k+q$-Form definieren müssen, d.h. auch wenn man einen Eintrag in η mit einem Eintrag in ω vertauscht, muss sich das Vorzeichen ändern.

Hierbei ist S_{k+q} die Gruppe aller Permutationen (also bijektiven Selbstabbildungen) der Menge $\{1, \dots, k+q\}$. Das *Signum* $\operatorname{sgn}(\sigma)$ einer solchen Permutation σ ist $+1$ oder -1, je nachdem ob σ als gerade Anzahl oder ungerade Komposition von Transpositionen (also Vertauschungen von genau zwei Zahlen) geschrieben werden kann.

Beachte, dass $\omega \wedge \eta$ $k+q$-linear ist, da jeder Summand $k+q$-linear ist. Gleichzeitig ist die Definition der langen Summe so gemacht, dass $\omega \wedge \eta$ alternierend wird: vertauscht man zwei Einträge, so ändert sich nur die Summationsreihenfolge (es werden ja sowieso alle Permutationen durchprobiert), mit einem

Unterschied: um von der neuen Konfiguration zu einer gegebenen zu kommen, muss man zunächst mit einer Transposition zur alten Konfiguration gelangen, und dann die vorher verwendete Permutation verwenden. Die neue Permutation ist also um eine Transposition länger als die alte, damit ändert sich das Signum um -1. Da dies für jeden Summanden passiert, muss man insgesamt mit -1 multiplizieren, wie gewünscht.

Falls $k = 0$, so wird einfach punktweise η mit dem Wert der Funktion ω multipliziert.

10.12 Lemma. *Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und $\omega \in \Omega^k(N)$, $\eta \in \Omega^q(N)$. Dann gilt*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta).$$

Beweis. Setze die Definitionen ein. □

10.13 Beispiel. $dx_1 \wedge dx_2(e_1, e_2) = 1$, $dx_1 \wedge dx_2(e_2, e_1) = -1$, $dx_1 \wedge dx_2(e_1, e_1) = 0 = dx_1 \wedge dx_2(e_2, e_2)$.

Allgemein gilt für 1-Formen ω und η

$$\omega \wedge \eta(v, w) = \omega(v)\eta(w) - \omega(w)\eta(v).$$

10.14 Lemma. *Sei ω eine k-Form auf M und η ein q-Form. Dann gilt*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kq}\eta \wedge \omega.$$

Das Dach-Produkt ist also nicht ganz kommutativ, aber nicht sehr weit davon weg. Man sagt, dass Produkt ist graduiert kommutativ.

Beweis. Die Definition von $\omega\wedge\eta(v_1, \dots, v_{k+q})$ entspricht der von $\eta\wedge\omega(v_1, \dots, v_{k+q})$, es müssen allerdings die ersten k Einträge an den letzten q Einträgen vorbeigetauscht werden. Dies erfordert kq-Transpositionen, liefert also das Vorzeichen $(-1)^{kq}$. □

10.15 Bemerkung. Beachte, dass die Definition des Produkts reine lineare Algebra ist: sie macht genau in der gleichen Weise Sinn für alternierende Formen auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V, mit den entsprechenden Eigenschaften.

10.16 Lemma. *Sei V ein m-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Der Vektorraum der alternierenden k-Formen auf V hat dann die Dimension $\binom{n}{k}$. Insbesondere ist er 1-dimensional für $k = m$ und Nulldimensional für $k > m$. Falls $\omega_1, \dots, \omega_m$ eine Basis des Raums der alternierden 1-Formen ist, so ist $\{\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le m\}$ eine Basis des Raums der alternierenden k-Formen.*

Beweis. Der Raum der alternierenden 1-Formen ist der Dualraum, hat also Dimension m. Es reicht, zu zeigen, dass die angegebene Menge eine Basis bildet, da sie genau $\binom{n}{k}$ Elemente enthält.

Sei $e_1, \dots, e_m$ eine Basis von V dual zu $\omega_1, \dots, \omega_m$, also $\omega_i(e_j) = 0$ falls $i \neq j$ und $\omega_i(e_i) = 1$.

Sei η eine beliebige alternierende k-Form auf V. Dann gilt

$$\eta = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k},$$

wie man durch einsetzen von $v_1, \dots, v_k \in V$ auf beiden Seiten sieht (da man die v_i in die Basisvektoren e_α entwickeln kann, genügt es, für die v_i Basisvektoren einzusetzen).

Umgekehrt zeigt man durch einsetzen aller möglichen Basisvektoren, dass die angegebene Menge von k-Formen nicht linear abhängig ist. □

10.17 Korollar. *Sei ω eine glatte k-Form auf $\mathbb{R}^m$. Dann gilt*

$$\omega_x = \sum_{1 \le i_1 < \cdots i_k \le m} f_{i_1,\dots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

für eindeutig bestimmte glatte Funktionen $f_{i_1,\dots,i_i}(x)$. Für $k = m$ gilt insbesondere

$$\omega = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

und für $k = m - 1$

$$\omega = \sum_{i=1}^m f_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

wobei der Hut bedeutet, dass dieser Faktor nicht vorkommt.

Beweis. Folgt aus dem algebraischen Lemma 10.16 mit dem gleichen Beweis wie Lemma 10.16: $f_{i_1,\dots,i_k}(x) = \omega_x(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. □

10.18 Bemerkung. Eine m-Form "sieht also fast so aus" wie der zu definierende Integrand für ein Integral ohne Maße. Das ist natürlich zunächst eine inhaltsleere Aussage, die Wahl der Schreibweise $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ erfolgt aber wirklich deshalb, weil wir unserem Ziel, integrierbare Objekte definiert zu haben, ein gutes Stück näher gekommen sind.

Sei genauer $\omega \in \Omega^m(M)$ für eine m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M. Sei $\Psi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^m$ eine Karte. Dann ist $\omega_\Psi := (\Psi^{-1})^* \omega$ eine glatte m-Form auf der offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$, also $\omega_\Psi = f_\Psi dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$.

Es ist jetzt verführerisch, das Integral von ω über U als $\int_V f_\Psi \, dx_1 \cdots dx_m$ zu definieren —das Prinzip ist ja fast immer, die Rechnungen für Mannigfaltigkeiten auf Rechnungen für $\mathbb{R}^m$ zurückzuführen. Das geht natürlich nur dann gut, wenn bei Benutzung einer anderen Karte kein anderer Wert herauskommt.

10.19 Lemma. *Sei M eine glatte m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^m(M)$. Seien $\Psi_{1,2}\colon U \to V_{1,2} \subset \mathbb{R}^m$ Karten von M. Sei $(\Psi_{1,2}^{-1})^* \omega = f_{1,2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$. Dann gilt*

$$f_2(x) = f_1(\Psi_1(\Psi_2^{-1}(x))) \cdot \det D_x(\Psi_1 \circ \Psi_2^{-1}).$$

Beweis. Aus der Funktorialität folgt

$$\begin{aligned} f_2(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m =& ((\Psi_2^{-1})^* \omega)_x = ((\Psi_1 \Psi_2^{-1})^* (\Psi_1^{-1})^* \omega)_x \\ =& ((\Psi_1 \Psi_2^{-1})^* (f_1 dx_1 \wedge \cdots dx_m))_x \\ =& f_1(\Psi_1 \Psi_2^{-1}(x)) (\Psi_1 \Psi_2^{-1})^* dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m. \end{aligned}$$

(Hier benutzen wir noch, dass Zurückziehen und Produkt vertauschen). Es genügt also, für den Diffeomorphismus $\Phi := \Psi_1 \Psi_2^{-1} \colon V_2 \to V_1$ zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ zu zeigen, dass

$$(\Phi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m))_x = (\det D_x \Phi) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Nun gilt per Definition

$$(\Phi^*(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m))_x = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m(D_x\Phi(e_1),\ldots,D_x\Phi(e_m))\cdot dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m.$$

Mit dem folgenden Lemma, angewendet auf $A := D_x\Phi$, folgt die Behauptung. □

10.20 Lemma. *Sei* $A \in M(m\times m;\mathbb{R})$*. Dann gilt*

$$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m(Ae_1,\ldots,Ae_m) = \det(A).$$

Beweis. Es handelt sich hier um lineare Algebra. Man beachte, dass die Determinante ebenfalls als alternierende m-Form aufgefasst werden kann: $\det(v_1,\ldots,v_m)$ ist definiert als Determinante der Matrix, deren Spalten gerade die v_i sind (in der angegebenen Reihenfolge). Die elementaren Eigenschaften der Determinante, die auch für deren Berechnung benutzt werden, sagen gerade, dass es sich um eine alternierende m-Form handelt.

Weiterhin gilt, dass die Spalten der Matrix A gerade gegeben sich durch $Ae_1,\ldots,Ae_m$. Also (per Definition) $\det(A) = \det(Ae_1,\ldots,Ae_m)$.

Da zwei alternierende m-Formen auf $\mathbb{R}^m$ sich nur um einen Faktor unterscheiden (die Menge der m-Formen auf $\mathbb{R}^m$ ist 1-dimensional), gibt es eine Zahl λ, so dass

$$\det(v_1,\ldots,v_m) = \lambda dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m(v_1,\cdots,v_m).$$

Man erkennt, dass $\lambda = 1$, indem man auf beiden Seiten $e_1,\ldots,e_m$ einsetzt, da dann auf beiden Seiten 1 steht. □

10.21 Bemerkung. Gehen wir zurück zu unserem Integrationsprojekt, so sehen wir, dass es gar nicht so schlecht aussieht.

Zur Erinnerung: gegeben eine m-Form ω auf einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, und eine Karte $\Psi\colon U\to V\subset\mathbb{R}^m$, schreiben wir $(\Psi^{-1})^*\omega = f_\Psi dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m$.

Für eine zweite Karte $\Phi\colon U_2\to V_2$ entsprechend $(\Phi^{-1})^*\omega = f_\Phi dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m$.

Dann $f_\Phi(x) = (f_\Psi\circ\alpha)(x)\cdot\det(D_x\alpha)$, mit dem Diffeomorphismus $\alpha := \Psi\circ\Phi^{-1}\colon V_2\to V$.

Nach Transformationsformel also (falls U und U_2 zusammenhängend)

$$\int_{V_2} f_\Phi(x)\;dx_1\cdots dx_m = \pm\int_V f_\Psi\;dx_1\cdots cx_m.$$

Dabei erhält man $+1$, falls $\det D_x\alpha$ positiv, und -1 falls $\det D_x\alpha$ negativ.

Leider ist das negative Vorzeichen natürlich nicht akzeptabel. Das Integral muss eindeutig definiert sein.

Problem ist: eigentlich sind die m-Formen doch nicht ganz die richtigen Integranden. Statt nach neuen Integranden zu suchen, wollen wir jetzt einen anderen Weg gehen, und auf geeignete Weise unsere Karten so festlegen, dass das Vorzeichen von $\det D_x\alpha$ für diese Kartenwechsel immer positiv ist.

11 Orientierung

11.1 Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m. Zwei glatte m-Formen ω_1, ω_2 auf M welche nirgends verschwinden heißen äquivalent, wenn es eine Funktion $f\colon M \to (0,\infty)$ gibt mit $\omega_1 = f\omega_2$.

Eine solche Äquivalenzklasse von m-Formen heißt Orientierung auf M.

11.2 Bemerkung. (1) Nicht jede Mannigfaltigkeit besitzt eine Orientierung.

(2) Zu jeder Orientierung, repräsentiert durch $\omega \in \Omega^m(M)$ gibt es die entgegengesetzte Orientierung, repräsentiert durch $-\omega$. Diese sind nicht äquivalent.

(3) Ist M zusammenhängend, so hat M entweder keine oder genau 2 Orientierungen.

Beweis. Wir wollen zeigen, dass ein zusammenhängendes M höchstens 2 Orientierungen hat. Seien $\omega, \eta \in \Omega^m(M)$ ein Repräsentanten von Orientierungen. Da ω_x, η_x nach Lemma 10.16 aus einem 1-dimensionalen Vektorraum stammt, gilt $\omega_x = f(x)\eta_x$ mit $f(x) \in \mathbb{R}$. Hierbei entweder $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$, da weder ω_x noch η_x verschwinden.

Man erhält also insgesamt $\omega = f\eta$. In lokalen Koordinaten erkennt man, dass f eine glatte Funktion ist. Also $f^{-1}(0,\infty)$ offen und $f^{-1}(-\infty,0)$ offen. M ist die disjunkte Vereinigung dieser beiden Mengen, aber zusammenhängend, also ist eine der beiden Mengen leer. Dann repräsentieren ω und η also entweder die gleiche Orientierung (wenn $f > 0$) oder entgegengesetzte Orientierungen (wenn $f < 0$). □

11.3 Bemerkung. Auch 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten (z.B. ein Punkt) haben Orientierungen, der Punkt $\{0\} \subset \mathbb{R}^N$ kann die Orientierung $[+1]$ oder $[-1]$ besitzen.

11.4 Lemma. *Sei $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m}$ eine glatte Funktion und $v \in \mathbb{R}^{N-m}$ ein regulärer Wert. Sei $M := f^{-1}(v)$ die zugehörige glatte eingebettete Mannigfaltigkeit. Dann besitzt M eine Orientierung.*

Beweis. Seien $v_i(x) := \operatorname{grad} f_i(x) = D_x f_i^t \in \mathbb{R}^N$ die Transponierten der Ableitungen der Komponentenfunktionen von f (für $i = 1, \dots, N-m$). Setze

$$\omega_x(w_1, \dots, w_m) := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N(w_1, \dots, w_m, v_1(x), \dots, v_{N-m}(x))$$

für $w_1, \dots, w_m \in T_xM$. Da die $v_i(x)$ glatte Funktionen von $x \in M$ sind, ist ω eine glatte m-Form auf M. Es bleibt zu zeigen, dass sei an keinem Punkt $x \in M$ verschwindet. Definiere die lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ durch

$$A(e_i) := \begin{cases} w_i; & i = 1, \dots, m \\ v_{i-m}(x); & i = m+1, \dots, N \end{cases}$$

Aus Lemma 10.20 folgt, dass $\omega_x(w_1, \dots, w_m) = \det(A)$. Da nach Voraussetzung Df_x eine surjektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^{N-m}$ ist, sind die $v_i(x)$ linear unabhängig. Außerdem steht T_xM senkrecht auf $v_i(x)$ für jedes i.

Man findet also w_i, so dass $(w_1, \dots, w_m, v_1(x), \dots, v_{N-m}(x))$ eine Basis von $\mathbb{R}^N$ bilden. Dann ist $\det(A) \neq 0$, also insbesondere $\omega_x \neq 0$. □

11.5 Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Orientierung. Sei $\omega \in \Omega^m(M)$ ein Repräsentant der Orientierung. Eine Karte $\Psi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^m$ heisst *orientiert*, falls $(\Psi^{-1})^*\omega$ äquivalent zu $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ ist.

11.6 Lemma. *(1) Eine orientierte Mannigfaltigkeit M der Dimension $m \geq 1$ besitzt orientierte Kartenumgebungen für jeden Punkt x im M.*

(2) Seien $\Psi\colon U \to V$ und $\Phi\colon U_2 \to V_2$ zwei orientierte Karten, und $\alpha := \Psi \circ \Phi^{-1}$. Dann gilt $\det D_x\alpha > 0$ für jedes $x \in U_2$.

Beweis. Ist eine Karte noch nicht orientiert, so multipliziere man einfach die erste Koordinate im Bild-$\mathbb{R}^m$ mit -1 (man komponiere mit dem Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^m$, der x_1 auf $-x_1$ abbildet). Die neue Karte wird orientiert sein, da jetzt $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ durch $-dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ ersetzt wird.

Wir haben in Lemma 10.19 gesehen, dass $\alpha^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = (\det D\alpha) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$. Nach Voraussetzung an die Orientierbarkeit unterscheidet sich $\alpha^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ von $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ um eine positive Konstante. □

11.7 Konvention. Wir werden beim Integrieren ab jetzt nur *orientierte* Karten benutzen, dann liefert unsere Strategie wohldefinierte Integrale.

11.8 Definition. Sei M eine orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit ($m \geq 1$), $\omega \in \Omega^m(M)$ eine Differentialform mit kompaktem Träger in einer offenen Menge U. Sei $\Phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^m$ eine orientierte Karte (global!), so dass $\Phi^{-1})^*\omega = f_\Phi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$, dann definiere

$$\int_M \omega := \int_V f_\Phi.$$

Da ω glatt mit kompaktem Träger, gilt dasselbe für f_Φ, also ist f_Φ integrierbar. Nach den bisherigen überlegungen ist $\int_M \omega$ wohldefiniert.

Falls $M = \{x_1, \dots, \}$ nulldimensional, so entspricht eine Orientierung der Wahl eines Vorzeichens $\epsilon_i \in \{1, -1\}$ für jeden Punkt $x_i \in M$ (dies sind die Komponenten von M). Dieses Vorzeichen ist wohldefiniert, da es nur gibt einen Diffeomorphismus von $\{x_i\}$ auf $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ gibt. Definiere

$$\int_M \omega := \sum_i \epsilon_i \omega(x_i).$$

11.9 Bemerkung. Unser nächstes Problem ist, dass wir bis jetzt nur Differentialformen integrieren können, deren Träger in einer Kartenumgebung enthalten ist (außer für $m = 0$). Das wird im allgemeinen ja nicht der Fall sein. Um dieses Problem zu Lösen, soll eine beliebige m-Form in Summanden zerlegt werden, die diese Eigenschaft haben.

12 Teilung der Eins

12.1 Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\{U_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M (d.h. alle U_i sind offene Teilmengen von M, und ihre Vereinigung ist ganz M. Es wird nicht verlangt, dass die U_i paarweise disjunkt sind).*

Dann gibt es abzählbar viele glatte Funktionen $\phi_j\colon M \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\operatorname{supp}(\phi_j) := \overline{\{x \in M \mid \phi_i(x) \neq 0\}} \subset U_i$ *für geeignetes i (abhängig von j).*

(2) $\phi_j(x) \in [0,1] \forall x \in M,\ i \in I$

(3) Für jedes $x \in M$ gibt es eine Umgebung V_x, so dass nur endlich viele der Einschränkungen $\phi_j|_{V_x}$ verschieden von Null sind (insbesondere $\phi_i(x) \neq 0$ nur für endlich viele i).

(4) $\sum_j \phi_j(x) = 1 \qquad \forall x \in M.$

Es gilt dann sogar: falls $K \subset M$ kompakt, ist die Einschränkung $\phi_i|_K$ nur für endlich viele i von Null verschieden.

Beweis. Notation: für eine Teilmenge X eines topologischen Raums A schreibe X° für das Innere und $\overline{X}$ für den Abschluss.

Seien $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ kompakte Mengen mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i^\circ = M$.

Wir wollen zunächst ein paar glatte Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^N$ konstruieren.

Bekannt ist, dass $f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2); & x > 0 \\ 0; & x \leq 0 \end{cases}$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $[0,\infty)$ ist, welche genau auf der linken Halbachse verschwindet. Seinen nun $a < b < c < d \in \mathbb{R}$. Dann ist $\phi_{a,b}(x) := f(x-a) \cdot f(d-x) > 0$ für $x \in (a,b)$, aber $\phi_{a,b}(x) = 0$ für $x \notin (a,b)$. Seien nun $a_1 < b_1, \dots, a_N < b_M$. $\phi(x_1,\dots,x_N) := \phi_{a_1,b_1}(x_1) \cdots \phi_{a_N,b_N}(x_N)$ ist dann eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^N$, welche genau im Inneren des Würfels $[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_N,b_N]$ nicht verschwindet.

Zu jedem Punkt $x \in K_k \setminus K_{k-1}^\circ$ wähle nun eine glatte Funktion $\tilde{\phi}_x \colon M \to [0,\infty)$ mit $\tilde{\phi}_x(x) \neq 0$, und so dass eine $i \in I$ gibt mit $\operatorname{supp}(\phi_x) \subset U_i \cap (K_{k+1}^\circ \setminus K_{k-2})$ (z.B. als Einschränkung einer Würfelfunktion ϕ wie oben von $\mathbb{R}^N$ auf $M \subset \mathbb{R}^N$). Dies geht, da alle $U_i \cap (K_{k+1}^\circ \setminus K_{k-2})$ offen sind.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ reichen nun endlich viele $x_{1,k}, \dots, x_{n_k,k} \in K$, so dass $\sum_{\alpha=1}^{n_k} \tilde{\phi}_{x_{\alpha,k}}(x) > 0$ für alle $x \in K_k \setminus K_{k-1}^\circ$, da die Mengen $\{y \mid \phi_x(y) > 0\}$ eine offene überdeckung der kompakten Menge $K_k \setminus K_{k-1}$ bilden.

Bis auf endlich viele der so konstruierten Funktionen verschwinden auf $K_j^\circ \setminus K_{j-1}$ alle, Ausnahme sind nur die in den Schritten $j-1$, j, $j+1$ erhaltenen Funktionen. Jeder Punkt $x \in M$ hat also eine offene Umgebung V_x (von der Gestalt $K_j^\circ \setminus K_{j-1}$) auf der nur endlich viele der $\tilde{\phi}_{\alpha,k}$ nicht Null sind. Deshalb ist $\psi := \sum_{k=1}^\infty \sum_{\alpha=1}^{n_k} \phi_{\alpha,k}$ eine glatte Funktion (Konvergenz ist kein Problem, da es sich ja lokal nur um endliche Summen handelt). Außerdem gilt $\psi(x) > 0$ für alle $x \in M$.

Definiere nun
$phi_{\alpha,k} := \tilde{\phi}_{\alpha,k}/\psi$. Als Quotient glatter Funktionen ist diese Funktion ebenfalls glatt, und es gilt $\sum_{\alpha,k} \phi_{\alpha,k}(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Für die letzte Aussage überdecke die kompakte Menge K durch endlich viele der V_x aus der lokalen Endlichkeit. Auf jedem dieser V_x sind nur endlich viele ϕ_i von Null verschieden, also gilt das auch für ganz K. □

13 Integration von Differentialformen

13.1 Definition. Sei M eine glatte orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit ($m \geq 1$) und $\omega \in \Omega^m(M)$ eine Differentialform mit kompaktem Träger. Sei

$\{U_i \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von M durch Definitionsbereiche von Karten und $\Psi_i \colon U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^m$ zugehörige orientierte Karten.

Sei $\phi_i \colon U_i \to [0,1]$ eine der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann sind alle $\phi_i\omega$ glatte Differentialformen mit kompaktem Träger, welcher in U_i enthalten ist. Da ω selbst kompakten Träger hat, sind nur endlich viele der $\phi_i\omega$ von Null verschieden.

Definiere nun

$$\int_M \omega := \sum_{i\in I} \int_{U_i} (\phi_i\omega),$$

wobei auf der rechten Seite Definition 11.8 (insbesondere die Karten Ψ_i) benutzt wird. Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Teilung der Eins und den gewählten Karten.

Beweis. Die Wohldefiniertheit muss überprüft werden.

Sei W_j eine weitere Überdeckung durch Kartengebiete mit untergeordneter Teilung der Eins β_j, mit Karten $\Phi_j \colon W_j \to E_j \subset \mathbb{R}^m$.

Dann ist auch $U_i \cap W_j$ solch eine Überdeckung, mit untergeordneter Teilung der Eins $\phi_i\beta_j$ (punktweises Produkt).

Nun gilt $\sum_{i\in I} \int_{U_i} \phi_i\omega = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \int_{U_i} \phi_i\beta_j\omega = \sum_{i\in I, j\in J} \int_{U_i\cap W_j} \beta_j\phi_i\omega = \sum_{j\in J} \int_{W_j} \beta_j\omega$, wobei benutzt wird, dass auf $U_i \cap W_j$ sowohl die Karte Φ_j als auch die Karte Ψ_i benutzt werden kann.

Außerdem wird benutzt, dass das Integral aus Definition 11.8 linear ist. □

13.2 Bemerkung. Die Integrationstheorie von Differentialformen kann von den glatten Formen auf geeignet zu definierende weniger reguläre („integrierbare") Differentialformen verallgemeinert werden.

14 Äußere Ableitung von Differentialformen

Das wichtigste Hilfmittel bei der Integration (in $\mathbb{R}$) ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: ein Integral über ein Interval kann, indem man den Integranden als Ableitung ausdrückt, einfach durch die Werte der Stammfunktion an den Endpunkten ausgedrückt werden.

Eine der besonderen Eigenschaften bei der Integration von Differentialformen ist, dass dieser Satz eine weitgehende Verallgemeinerung besitzt. Dazu muss man zunächst aber eine Ableitung von Differentialformen definieren.

14.1 Definition. Sei M eine glatte m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau eine Möglichkeit, eine *äußere Ableitung* $d \colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ zu definieren, die folgende Eigenschaften hat:

(1) d ist linear.

(2) Für $f \in \Omega^0(M)$ (also $f \colon N \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion) ist df wie in Beispiel 10.9 definiert.

(3) Für $\omega \in \Omega^p(M)$ und $\eta \in \Omega^q(M)$s gilt $d(\omega\wedge\eta) = (d\omega)\wedge\eta + (-1)^p\omega\wedge(d\eta)$.

(4) $d(d\omega) = 0$ für jede Differentialform ω.

Beweis. Sei $x \in M$, $x \in U \subset M$ eine Kartenumgebung und $\chi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^m$ eine Karte. Sei $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, so dass $\phi \equiv 1$ in einer Umgebung von x, aber $\mathrm{supp}(\phi) \subset U$. Dann gilt (da ϕ in Umgebung von x konstant ist) $(d\phi)_x = 0$. Nach der Produktformel also

$$d\omega_x = (\phi \wedge d\omega)_x + (\underbrace{d\phi_x}_{=0} \wedge \omega_x) = (d(\phi\omega))_x.$$

Unter Benutzung des Diffeomorphismus $\chi\colon U \to V$ wissen wir bereits, dass es eindeutige glatte Funktionen $\alpha_{i_1,\dots,i_p}\colon U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\phi\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le m} \alpha_{i_1,\dots,i_p} d\chi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\chi_{i_p},$$

wobei $d\chi_i := \chi^* dx_i$ nach Lemma 10.6 die äußere Ableitung der Koordinatenfunktion χ_i, mit dx_i die Standard-1-Formen auf $\mathbb{R}^m$.

Mit Linearität und der Produktformel erhält man also

$$(d\omega)_x = d(\phi\omega)_x = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le m} d\alpha_{i_1,\dots,i_p} \wedge d\chi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\chi_{i_p} \tag{14.2}$$

da $d(d\chi_i) = 0$ nach Regel (4). Es folgt, dass die äußere Ableitung d durch die angegebenen Regeln eindeutig festgelegt ist.

Umgekehrt rechnet man nach, dass Formel (14.2) eine äußere Ableitung mit den gewünschten Eigenschaften definiert. Hierbei ist insbesondere wichtig, zu zeigen, dass sich bei Benutzung einer anderen Karte dieselbe Differentialform ergibt. □

14.3 Proposition. *Die äußere Ableitung ist* natürlich*: falls $f\colon M \to N$ glatt und $\omega \in \Omega^p(N)$, so gilt*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

Beweis. Dies muss man im Prinzip nachweisen, um zu zeigen, dass die äußere Ableitung wohldefiniert ist. Wir wollen es hier deshalb nachrechnen. Wie in Definition 14.1 schreiben wir lokal $\omega \in \Omega^p(N)$ als

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_p \le \dim(N)} \alpha_{i_1,\dots,i_p} d\chi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\chi_{i_p}.$$

Dann gilt, da zurückziehen und Dachprodukt vertauschen, und wegen Lemma 10.6

$$\begin{aligned} f^*(d\omega) &= \sum d(f^*\alpha_{i_1,\dots,i_p}) \wedge d(f^*\alpha_{i_1}) \wedge \dots \wedge d(f^*\alpha_{i_p}) \\ &= df^*(\sum \alpha_{i_1,\dots,i_p} \wedge d\chi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\chi_{i_p}) = d(f^*\omega). \end{aligned}$$

□

14.4 Beispiel. Im Falle einer Differentialform $\omega = \sum_{i_1 < \dots i_p} \alpha_{i_1,\dots,i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ auf $\mathbb{R}^m$ (dies ist nach Korollar 10.17 der allgemeine Fall), gilt

$$d\omega = \sum_{i_1,\dots,i_p} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \alpha_{i_1,\dots,i_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Da alle Summanden, in denen dx_j zweimal vorkommt, verschwinden (dies folgt aus der Antilinearität) fallen nochmal einige der partiellen Ableitungen weg.

Insbesondere gilt für eine $(m-1)$-Form (die wir in Standard-Form schreiben)

$$\begin{aligned} d\,(f_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m + f_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_m + \dots + f_m dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1}) \\ = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + (-1)^m \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für Formen auf $\mathbb{R}^3$:

- $df(x,y,z) = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy + (\partial f/\partial z)dz$
- $d(f dx + g\,dy + h\,dz) = (\partial h/\partial y - \partial g/\partial z)dy \wedge dz + (\partial f/\partial z - \partial h/\partial x)\,dz \wedge dx + (\partial g/\partial x - \partial f/\partial y)dx \wedge dy$
- $d(f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy) = (\partial f/\partial x + \partial g/\partial y + \partial h \partial z)dx \wedge dy \wedge dz$

Hier findet man insgeheim die drei klassischen Differentialoperatoren für Vektorfelder wieder: die Komponenten von $\operatorname{grad} f$ tauchen auf der rechten Seite von df auf (dies war uns schon bekannt).

Weiterhin sind die Komponenten von $\operatorname{rot}(f,g,h)$ auf der rechten Seite von $D(f\,dx + g\,dy + h\,dz)$ zu finden, und $\operatorname{div}(f,g,h) = \partial f/\partial x + \partial g/\partial y + \partial h/\partial z$, was auch $d(f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy)$ bestimmt.

15 Gebiete mit Rand

15.1 Definition. Sei M eine glatte m-dimensionale Mannigfaltigkeit. $\Omega \subset M$ heißt *glattes Gebiet mit Rand* $\partial\Omega$, falls es eine glatte Funktion $u\colon M \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\Omega = u^{-1}((-\infty, 0])$, und so dass $d_x u \neq 0$ für alle $x \in u^{-1}(0) =: \partial\Omega$.

Dann ist $\partial\Omega$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m-1$.

Sei M orientiert durch $\omega \in \Omega^m(M)$. Dann ist $\partial\Omega$ orientiert durch $\eta \in \Omega^{m-1}(\partial\Omega)$ mit $\eta(v_1, \dots, v_{m-1}) = \omega(\nu, v_1, \dots, v_{m-1})$, wobei $\nu \in T_x M$ so gewählt wird, dass $du(\nu) = 1$.

Beweis. Wieder sind in die Definition einige Behauptungen hineingemischt. Zunächst ist $\partial\Omega$ eine (ebenso wie M eingebettete) Mannigfaltigkeit. Sei dazu $x \in \partial\Omega$ und $\overline{\Phi}\colon \overline{U} \to \overline{V} \subset \mathbb{R}^N$ eine Karte von M (mit $x \in \overline{U}$), d.h. $\overline{\Phi}(M \cap \overline{U}) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Sei $\overline{f}$ eine Fortsetzung von f auf $\overline{U}$. Nach Voraussetzung ist $D_x f \neq 0$. Außerdem hat $D_x\overline{\Phi}$ Rang N (maximalen Rang, da $D_x\overline{\Phi}$ surjektiv). Nach ggf. umnummerieren der Koordinaten können wir annehmen, dass $D_x\overline{\Psi} \neq 0$, wenn wir $\overline{\Psi}_1 = \overline{u}$ und $\overline{\Psi}_j = \overline{\Phi}_j$ für $j = 2, \dots, N$ definieren, da wir $D_x\overline{\Psi}$ aus $D_x\overline{\Phi}$ erhalten, indem wir die erste Zeile durch die Zeile $D_x\overline{f}$ ersetzen (verwende Basisaustauschsatz). Damit ist aber nach dem Satz über die Umkehrfunktion $\overline{\Psi}$ (auf einer geeigneten Umgebung) eine Karte von M. Da $\overline{\Psi}(\partial\Omega) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$, ist die neue Karte gleichzeitig eine Karte von $\partial\Omega$.

Beachte außerdem, dass $\overline{\Psi}(\Omega) \subset (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$, es handelt sich um eine sogenannte Randkarte.

Für die Orientierung beachte: Wähle eine orientierte Randkarte Φ. In lokalen Koordinaten gilt dann $\Phi^*\omega_x = \beta(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$, mit $\beta(x)$ glatt und $\beta(x) > 0$ für alle x. In diesen Koordinaten ist $\Phi^* u = x_m$, also $\Phi^* du = dx_m$. In diesen Koordinaten entspricht also e_m einer möglichen Wahl für ν, und somit $\Phi^*\eta_x =$

$\beta(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m-1}$ (an der m-ten Stelle wird ja e_m in $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ eingesetzt). Insbesondere wird so eine glatte Form η definiert.

Nutzung der Randkarte zeigt außerdem, dass $du(v) = 0$ für jedes $v \in T_x\partial\Omega \subset T_xM$. Gilt also $du(\nu_1) = 1 = du(\nu)$ für $\nu, \nu_1 \in T_xM$, so gilt $\nu_1 = \nu + v$ für $v \in T_x\partial M$ (da $\dim(T_x\partial M) = m-1$ und $\dim(T_xM) = m$). Da ω alternierend ist folgt, dass $\eta(v_1, \dots, v_{m-1})$ wohldefiniert ist: der Ausdruck ist sowieso Null, wenn die $v_1, \dots, v_{m=1}$ keine Basis von $T_x\partial\Omega$ bilden. Ist dies der Fall, drücke v in Termin dieser Basis aus, verwende Linearität und die Eigenschaft „alternierend". Die Form η ist also wohldefiniert; sie hängt nicht von der speziellen Wahl von ν ab (und daher auch nicht von der konkreten Koordinatenwahl, so dass sie global als glatte Form definiert ist).

Ausnahmefall: wenn $m = 1$, kann unter Umständen keine orientierte Randkarte gewählt werden. Dies geht genau dann, wenn die Orientierung ω ein positives Vielfaches von dx_1 ist. Wenn eine orientierte Randkarte gewählt werden kann, ist die induzierte Orientierung auf dem Randpunkt $[+1]$. Sonst ist die induzierte Orientierung $[-1]$, da $\omega(\nu)$ dann negativ ist (die Randkarten existieren ja weiterhin, und die Konstruktion von oben macht immer noch Sinn). □

15.2 Beispiel. (1) $\mathbb{R}^m_{\le 0} := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \le 0\}$ ist Untermannigfaltigkeit mit Rand von $\mathbb{R}^m$, mit definierender Funktion x_1, und mit Rand $\partial\mathbb{R}^m_{\le 0} = \mathbb{R}^{m-1}$.

(2) $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1\}$ ist Untermannigfaltigkeit mit Rand S^{n-1} von $\mathbb{R}^n$, mit definierender Funktion $|x|^2 - 1$.

(3) Die "obere Halbkugel" $\{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_{m+1} \ge 0\}$ ist Untermannigfaltigkeit mit Rand S^{m-1} von S^m, mit definierender Funktion $-x_{m+1}$.

16 Satz von Stokes

16.1 Satz. *Sei Ω ein glattes Gebiet mit orientiertem Rand $\partial\Omega$ in einer orientierten Mannigfaltigkeit M der Dimension m. Sei $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ eine $(m-1)$-Form mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_\Omega (d\omega) = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

Hierbei sei $i\colon \partial N \to M$ die Inklusionsabbildung. Dann ist $\int_{\partial N} \omega$ eine Abkürzung von $\int_{\partial N} i^*\omega$.

Dies ist der Satz von Stokes, die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Zunächst will ich (zur Hälfte) zeigen, dass letzterer wirklich ein Spezialfall ist.

16.2 Beispiel. Betrachte $(-\infty, 0]$ als glattes Gebiet mit Rand in $\mathbb{R}$, mit definierender Funktion $u(x) = x$. Sei $f \in \Omega^0(\mathbb{R})$ eine Form mit kompaktem Träger, also eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Dann gilt $df = \partial f/\partial x\, dx$ und somit

$$\int_{(-\infty,0]} df = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = f(0).$$

Wir benutzen hier, dass f kompakten Träger hat, der zweite Randterm verschwindet daher.

16.3 Bemerkung. Für einen unteren Randpunkt kommt unsere Orientierungskonvention für nulldimensionale Ränder ins Spiel. Da im Hauptsatz einer der beiden Randterme negativ ist, kann man solch eine Vorzeichenkonvention nicht vermeiden (oder die Sätze werden falsch).

Beweis des Satzes von Stokes. Sei zunächst $m = \dim(M) \geq 1$. Wähle für Ω eine Überdeckung durch Karten- und Randkartengebieten, mit zugehörigen orientierten Karten und orientierten Randkarten, und mit einer untergeordneten Teilung der Eins ϕ_i. Dann gilt

$$\int_\Omega d\omega = \sum_i \int_\Omega d(\phi_i\omega); \qquad \int_{\partial\Omega} \omega = \sum_i \phi_i\omega.$$

Da der Träger von ω kompakt ist, sind beide Summen endliche Summen.

Für die i, so dass $\operatorname{supp}(\phi_i) \cap \partial\Omega = \emptyset$, ist das Randintegral natürlich Null. Wir zeigen, dass dasselbe auch für das innere Integral gilt: Nach Definition, und mit Wahl einer geeigneten Karte χ_i gilt

$$\int_\Omega d(\phi_i\omega) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=1}^m \frac{\partial\alpha_k}{\partial x_k} dx_1 \cdots dx_m,$$

wobei $\chi_i^*(\phi_i\omega) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1}\alpha_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_m$ (der Hut bedeutet, dass der entsprechende Term *nicht* vorkommt, wohl aber alle anderen).

Der Satz von Fubini sagt, dass wir im k-ten Summanden die Integration nach der i-ten Variablen zuerst durchführen können. Da α_k kompakten Träger hat, erhält man dafür, nach Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, Null.

Es bleiben noch die i zu betrachten, die den Rand treffen. Unter Benutzung einer Randkarte χ_i ergibt sich hier

$$\int_\Omega d(\phi_i\omega) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \sum_{k=1}^m \frac{\partial\alpha_k}{\partial x_k} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_m.$$

Mit demselben Argument wie eben verschwinden die Summanden $k = 2, \ldots, m$. Nicht jedoch der Summand $k = 1$, hier liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (wobei zuerst die Integration über x_m durchgeführt wird)

$$\int_\Omega d(\phi_i\omega) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \alpha_1 \, dx_2 \cdots dx_m.$$

Betrachte nun $\int_{\partial\Omega} \phi_i\omega$. Unter Benutzung der (orientierten) Randkarten ergibt sich

$$\int_{\partial\Omega} \phi_i\omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} i^* \left(\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1}\alpha_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \cdots \wedge dx_m \right),$$

wobei $i\colon \mathbb{R}^{m-1} = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ die Inklusion ist. Nun gilt $i^*dx_1 = d(i^*x_1) = 0$, da die Funktion x_1 auf $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ konstant gleich Null ist. Da Zurückziehen mit dem Dachprodukt vertauscht, verschwinden alle Summenden, welche dx_1 enthalten. Weiterhin gilt $i^*dx_k = dx_k$ falls $k > 1$ (da die Funktionen

x_k für $k > 1$ auch nach Einschränken noch standard-Koordinatenfunktionen sind). Also

$$\int_{\partial\Omega} \phi_i \omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \alpha_1 dx_2 \cdots dx_m.$$

Dies ist genau der Term, der sich für das Integral über Ω ergab, und die Formel folgt.

Dasselbe Argument funktioniert, wenn $m = 1$ und für alle inneren Summanden, sowie für die Randkarte χ_i, welche orientiert sind. Für die Summanden, für welche die Randkarte nicht orientiert ist, muss der Randterm mit -1 multipliziert werden (man „integriert“ ja dann über einen Punkt mit negativer Orientierung). Gleichzeitig erhält man hier

$$\int_{\Omega} \phi_i \omega = -\int_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{m-1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k} dx_1 \cdots dx_m,$$

also ebenfalls ein negatives Vorzeichen. Da die Argumente in lokalen Koordinaten weiterhin gelten, erhält man also insgesamt wieder Gleichheit (beide Terme sind negativ verglichen mit den vorher erhaltenen Werten). □

16.4 Bemerkung. Der Satz von Stokes kann noch sinnvoll verallgemeinert werden. Insbesondere ist es wichtig, auch Gebiete zuzulassen, der Ränder nicht glatt sind (z.B. einen Würfel im $\mathbb{R}^m$). Dies ist mit der von uns entwickelten Maßtheorie relativ problemlos möglich. Die Menge der singulären Punkte muss nur „klein genug“ sein, genauer gesagt von $(m-1)$-dimensionalem (Haussdorff)-Maß Null.

Aus Zeitgründen wird dies hier nicht durchgeführt (vergleiche z.B. [6]). Alle in der Physik gebräuchlichen nicht-glatten Gebiete, insbesondere Quader, erfüllen die Bedingungen, die

17 Die klassischen Integralsätze

Die klassischen Integralsätze werden häufig nicht mit Differentialformen, sondern mit Vektorfeldern formuliert. Dies beruht auf einer simplen Übersetzung.

17.1 Definition. Ein Vektorfeld a auf (einer offenen Teilmenge von) $\mathbb{R}^m$ ordnet jedem Punkt $x \in M$ einen Tangentialvektor $a(x) \in T_x\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ zu. Die kanonische Identifizierung von T_xM mit $\mathbb{R}^m$ erlaubt uns also, in diesem speziellen Fall Vektorfelder als Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^m$ anzusehen (Vorsicht: Vektorfelder transformieren sich aber nicht wie Funktionen).

Die Menge der glatten Vektorfelder nennen wir $V(\mathbb{R}^m)$.

Setze $dV := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$. Man hat nun folgende Isomorphismen:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &: C^\infty(\mathbb{R}^m) \to \Omega^0(\mathbb{R}^m); \quad f \mapsto f \\
\beta_1 &: V(\mathbb{R}^m) \to \Omega^1(\mathbb{R}^m); \quad (a_1, \dots, a_m) \mapsto a_1 dx_1 + \cdots + a_m dx_m \\
\beta_2 &: V(\mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3); (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1\, dx_2 \wedge dx_3 + a_2\, dx_3 \wedge dx_1 + a_3\, dx_1 \wedge dx_2 \\
\beta_{top} &: C^\infty(\mathbb{R}^m) \to \Omega^m(\mathbb{R}^m); \quad f \mapsto f\, dV.
\end{aligned}$$

Wir haben bereits gesehen, dass unter diesen Isomorphismen

$$\begin{aligned} d(\beta_0 f) &= \beta_1(\operatorname{grad} f) \\ d(\beta_1 a) &= \beta_2(\operatorname{rot} a) \\ d(\beta_2 a) &= \beta_{top}(\operatorname{div} a). \end{aligned}$$

17.2 Korollar. *Da $d \circ d = 0$, folgt $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$ und $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$.*

Der Satz von Stokes liefert jetzt als Spezialfall:

17.3 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein glattes Gebiet mit Rand, $a \in V(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} a \, dV = \int_{\partial\Omega} \beta_2(a).$$

Beachte, dass die linke Seite wie üblich definiert ist, wenn man dV durch $dx_1\, dx_2\, dx_3$ ersetzt. Für die rechte Seite braucht man ein Flächenintegral, und wir haben ein solches nur mittels der Integration von Differentialformen definiert. Man kann jedoch folgende Anschauung zugrunde legen: die Differentialformen $(dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$ bilden zusammen einen Vektor von 2-Formen, der beim Einsetzen von 2 Vektoren v, w genau einen Vektor senkrecht zu v und w liefert, dessen Länge gleich der Fläche des von v und w aufgespannten Parallelogramms ist (um dies zu überprüfen, muss man wegen der Bilinearität nur Einheitsvektoren einsetzen) (und beim Einschränken auf den Rand muss man ja genau eine Basis des Tangentialraums $T_x\partial\Omega$ einsetzen, um den "Wert" der eingeschränkten Differentialform zu testen). Es handelt sich also um eine Art 2-dimensionales (vektorielles) Flächenelement $d\vec{F}$. Multiplikation in der angegebenen Weise mit a bedeutet gerade, das Skalarprodukt des Vektors a mit dem zu dF gehörenden Normalenvektor. Daher schreibt man oft

$$\int_{\partial\Omega} \beta_2(\vec{a}) =: \int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dF,$$

und erklärt $\vec{n}$ als den Einheitsnormalenvektor zur Fläche $\partial\Omega$ und dF als das (skalare) Flächenelement. Für uns sind diese Dinge aber nicht definiert, sie mögen allerdings die Anschauung erleichtern.

Entsprechend erhält man den Stokesschen Integralsatz aus dem Satz von Stokes:

17.4 Satz. *Sei M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ und Ω ein glattes Gebiet mit Rand in M. Dann gilt für jedes Vektorfeld a auf $\mathbb{R}^3$*

$$\int_\Omega \operatorname{rot} a \cdot n \, dF := \int_\Omega \beta_2(\operatorname{rot} a) = \int_{\partial\Omega} \beta_1(a) =: \int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot d\vec{s}.$$

Hier wird entsprechend der obigen Diskussion $\beta_1(a)$ als Skalarprodukt des Vektors a mit dem Linienelement $d\vec{s}$ interpretiert.

Hier können wir an das in Diff II definierte Kurvenintegral anknüpfen. Der Rand $\partial\Omega$ von Ω ist 1-dimensional, also eine (Vereinigung von) Kurven. Jede Parametrisierung $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ (mit $\gamma' \neq 0$ überall) stellt dann eine Karte des Randes dar. Nach Definition gilt dann also, wenn wir annehmen, dass wir mit einer Karte (bis auf Nullmengen) auskommen

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \beta_1(a) &= \int_a^b \gamma^*(a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + a_3 dx_3)\\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^3 \gamma^* a_k d(\gamma^* x_k) = \int_a^b \sum_{k=1}^3 a_k \circ \gamma d\gamma_k\\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^3 a_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)\,dt,\end{aligned}$$

wir erhalten also gerade unser bekanntes Kurvenintegral zurück. **(Kommentar: Dies könnte auch eine Übungsaufgabe sein!)**

17.5 Bemerkung. Weitere Spezialfälle (die Greenschen Formeln) erhält man, wenn man $a = \operatorname{grad} f$ einsetzt. Dann erhält man Formeln für $\Delta f := \operatorname{div}\operatorname{grad} f$, z.B.

$$\int_\Omega \Delta f\,dV = \int_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} f \cdot \vec{n})\,dF,$$

sowie

$$\int_\Omega f\Delta g - g\Delta f = \int_{\partial\Omega} (f(\operatorname{grad} g \cdot \vec{n}) - g(\operatorname{grad} f \cdot n))\,dF,$$

wobei Ω ein glattes Gebiet mit Rand in $\mathbb{R}^3$.

Der letzte Spezialfall behandelt Gebiete in $\mathbb{R}^2$.

17.6 Satz. *Sei Ω ein glattes Gebiet mit Rand in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt für jedes Vektorfeld a*

$$\int_\Omega \operatorname{div} a\,dV = \int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot d\vec{s},$$

wobei das Randintegral genau wie oben eines der früher bekannten Kurvenintegrale ist.

18 Holomorphe Funktionen

Als letzten Spezialfall wollen wir den Satz von Stokes für Gebiete in der Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ anschauen. Hier lassen sich nun auf recht kurze Weise viele wesentliche Sätze aus der Funktionentheorie (auch komplexe Analysis genannt) beweisen.

Dazu kehren wir zurück zu den komplexwertigen Formen. Jede komplexwertige Form spaltet auf als Summe von Realteil und Imaginärteil, und diese beiden sind (bis auf einen Faktor $\sqrt{-1}$) reellwertige Differentialformen. Auf diese Weise übertragen sich ausnahmslos alle bisher erzielten Ergebnisse auf komplexwertige Formen und werden im folgenden für solche Formen benutzt.

18.1 Definition. Wir definieren die komplexwertige 1-Form $dz := dx + i\,dy$ auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (wobei wir nun die Variable (x, y) benutzen).

18.2 Definition. Eine stetig differenzierbare Funktion $f = u + iv\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls

$$d(f\,dz) = 0.$$

Beachte, dass

$$\begin{aligned}
d(f\,dz) =& df \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dz \\
=& \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} dx \wedge (dx + i\,dy) + \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} dy \wedge (dx + i\,dy) \\
=& i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Da Real- und Imaginärteil unabhängig voneinander sind, ist $f = u + iv$ also genau dann holomorph, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \text{und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen werden die Chauchy-Riemann Differentialgleichungen genannt.

18.3 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wenn eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, so existiert der komplexe Differenzenquotient*

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(a+z) - f(a)}{z} =: f'(a) \in \mathbb{C}$$

für jedes $a \in U$.

Beweis. Übungsaufgabe, der Limes ist $D_a f$, aufgefasst als lineare Abbildung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, welche durch Multiplikation mit der komplexen Zahl $f'(a)$. □

18.4 Definition. Wir können auf diese Weise (und haben es in Diff 1 auch schon getan) höhere *komplexe* Ableitungen definieren.

Wir werden später sehen, dass die Existenz der ersten komplexen Ableitung gleich die Existenz beliebig vieler Ableitungen impliziert —im Gegensatz zu den reellen Ableitungen, wo es ja für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion in $C^k(\mathbb{R}) \setminus C^{k-1}(\mathbb{R})$ gibt.

18.5 Bemerkung. Wir werden im folgenden immer von holomorphen Funktionen wie oben definiert ausgehen. In der Funktionentheorie zeigt man (Lemma von Goursat), dass die Existenz von $f'(a)$ für jedes $a \in U$ bereits ausreicht, um Holomorphie (insbesondere Stetigkeit der partiellen Ableitungen) zu folgern.

18.6 Lemma. *Falls f und g holomorph sind, dann auch ihr Produkt fg.*

Beweis. Die Produktregel gilt für komplexwertige Formen. Also $d(fg\,dz) = g\,df \wedge dz + f\,dg \wedge dz = 0$. □

18.7 Lemma. *Sei $a \in \mathbb{C}$. Die Funktion $1/(z-a)\colon \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph.*

Beweis.

$$0 = d(dz) = d((z-a)\frac{1/(z-a)}{}dz) =$$

$$\frac{1}{z-a} d(z-a) \wedge dz + (z-a) d(1/(z-a)\,dz) = (z-a) d(1/(z-a)\,dz).$$

Da $(z-a)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nirgends verschwindet, folgt $d(1/(z-a)\,dz) = 0$. □

Wir beweisen nun zwei grundlegende Formeln in der komplexen Analysis, den Cauchyschen Integralsatz und die Cauchysche Integralformel.

18.8 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\phi\colon D^2 \to U$ eine glatte Abbildung, mit Einschränkung $\phi\colon S^1 \to U$. Dann gilt*

$$\int_{S^1} \phi^*(f\,dz) = 0.$$

Sei $a \in U$ und $D_p\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei surjektiv für jedes $p \in f^{-1}(a)$. Es gelte $f^{-1}(a) \cap S^1 = \emptyset$. Wir definieren die Umlaufzahl

$$u_\phi(a) := \sum_{p \in f^{-1}(a) \cap D^2} \operatorname{sgn}(\det D_p\phi).$$

Hier ist sgn *das* Vorzeichen*, also $+1$ oder -1. Dann gilt*

$$\int_{S^1} \phi^* \left(\frac{f(z)}{z-a}\,dz \right) = 2\pi i u_\phi(a) \cdot f(a).$$

Häufig verwendet wird der Spezialfall, in dem $\phi\colon D^2 \to U$ eine komplex-lineare Einbettung ist (d.h. in diesem Fall: reell linear, orientiert,...), mit $a \in U$ im Inneren von $\phi(D^2)$ (z.B. der Mittelpunkt) und Radius r. In diesem Fall gilt $u_\phi(a) = 1$. Dann schreibt man oft

$$\int_{\partial D_r(a)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz := \int_{S^1} \phi^* \left(\frac{f(z)}{z-a}\,dz \right) = 2\pi i \cdot f(a).$$

Beweis. Der Satz von Stokes impliziert $\int_{S^1} \phi^*(f\,dz) = \int_{D^2} \phi^*(d(f\,dz)) = 0$, also der Cauchysche Integralsatz.

Für die Integralformel sei $D_r(a)$ eine kleine Scheiben vom Radius r um a, und so dass $\phi^{-1}(D_r(a))$ aus disjunkten Gebieten B_p im Inneren von D^2 (so dass B_p $p \in f^{-1}(a)$ enthält) . Hier benutzen wir, dass ϕ eingeschränkt auf kleine Umgebungen dieser Punkte p nach dem Satz über die lokale Inverse ein Diffeomorphismus ist. Sei $B := D^2 \setminus \bigcup_{p \in f^{-1}(a)} B_p$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \phi^* \left(\frac{f(z)}{z-a}\,dz \right) = \int_B \phi^* \left(d\frac{f(z)}{z-a} \right) = 0,$$

Hier benutzen wir, dass $f(z)/(z-a)$ auf $U \setminus \{a\}$ nach Produktregel und Lemma 18.7 holomorph ist. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \phi^* \left(\frac{f(z)}{z-a}\,dz \right) = \int_{S^1} \phi^* \left(\frac{f(z)}{z-a}\,dz \right) - \sum_{p \in f^{-1}(a)} \int_{\partial B_p} \phi^* \left(\frac{f(a)}{z-a}\,dz \right) \\ - \sum_{p \in f^{-1}(a)} \int_{\partial B_p} \phi^* \left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \right). \end{aligned} \tag{18.9}$$

Hierbei erhalten wir -1 als Vorzeichen der neuen Randterme, da die positive Orientierung erhalten würde, wenn man ∂B_p als Rand von B_p auffassen würde, hier ist ∂B_p aber eine Komponente des Randes des Komplements, d.h. die Normalenrichtung ist gerade entgegengesetzt (d.h. bei einer Randkarte muss man die Normalenrichtungen und damit auch die Randrichtung umkehren).

Da ϕ in einer Umgebung von B_p ein Diffeomorphismus ist, und da wir die Integration über Differentialformen so definiert haben, dass sie unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen unverändert ist (einer der angenehmen Punkte bei dieser Definition), und unter orientierungsumkehrenden gerade das Vorzeichen umkehrt, erhalten wir weiter:

$$\int_{\partial B_p} \phi^* \omega = \pm \int_{\partial D_r(a)} \omega,$$

wobei das Vorzeichen $+1$ ist, wenn die Einschränkung von ϕ auf B_p orientierungserhaltend ist, und $= 1$, wenn die Einschränkung auf B_p orientierungsumkehrend ist. Das erste ist der Fall, wenn $\det D_p\phi > 0$, das zweite wenn $\det D_p\phi < 0$.

18.10 Lemma.

$$\int_{\partial D_r(a)} \frac{1}{z-a}\, dz = 2\pi i.$$

Beweis. Übungsaufgabe. ☐

Damit sind die zweiten Terme in Gleichung (18.9) bestimmt. Unter Berücksichtigung der Orientierungsvorzeichen ergeben sie genau die gewünschte Antwort. Es bleibt noch, zu zeigen, dass die restlichen Terme Null sind.

Auch hier erhält man, unter Benutzung der Diffeomorphieinvarianz des Integrals von Differentialformen

$$\int_{\partial B_p} \phi^* \left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz \right) = \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz.$$

Mit der Parametrisierung $\gamma_r : t \mapsto r\exp(2\pi i t) + a$ von $\partial D_r(a)$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz &= \int_0^1 \frac{f(\gamma_r(t)) - f(a)}{r\exp(2\pi i t)} \gamma_r'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 (f(\gamma_r(t)) - f(a))\, 2\pi i\, dt \xrightarrow{r\to 0} 0. \end{aligned}$$

Hier benutzen wir, dass $\gamma_r(t) \xrightarrow{r\to 0} a$, und somit, da f differenzierbar (und somit insbesondere stetig) an a, für vorgegebenes $\epsilon > 0$ $|f(\gamma_r(t)) - f(a)| < \epsilon$, falls r nur genügend klein ist. Dann wird aber auch das Integral beliebig klein.

Insgesamt folgt nun aus Gleichung (18.9) die Cauchysche Integralformel.

(Kommentar: Einschub über Orientierung und lineare Abbildungen, sowie Differential (bei Abb. zwischen $\mathbb{R}^n$).) ☐

Die Integralformel hat einige bemerkenswerte Konsequenzen. Zum Beispiel sieht man, dass bei einer holomorphen Funktion die Werte im Inneren eines Kreises durch die Randwerte festgelegt sind. Andererseits erhält man die wichtige Potenzreihenentwicklung:

18.11 Satz. *Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \in U$ so, dass $D_r(a) \subset U$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

und diese Taylorreihe ist (gleichmäßig) konvergent (gegen $f(z)$) auf ganz $D_r(a)$.

Hierbei ist $f^{(n)}(a)$ die n-te (komplexe) Ableitung an der Stelle a, wie in Definition 18.4. Insbesondere ist jede holomorphe Funktion beliebig oft ableitbar, und alle Ableitungen sind ebenfalls holomorph. Weiter gilt als Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel für jedes b im Inneren von $D_r(a)$

$$f^{(n)}(b) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D_r(a)} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\,dz.$$

Beweis. Wir führen den Beweis für $a = 0$ und $r = 1$, der allgemeine Fall ergibt sich durch geeignete Translation und Streckung (oder mit geeigneter Modifikation des Beweises).

Wir beginnen mit der Taylorreihe in b von $\frac{1}{z-b} = \sum_{k=0}^{\infty}(b/z)^n$. Diese Reihe, und genauso $\frac{f(z)}{z-b} = \sum_{k=0}^{\infty} f(z)\frac{b^n}{z^n}$ konvergiert gleichmäßig in z für festes $|z| = r = 1$, soweit $|b| < r$. Hier benutzen wir, dass $f(z)$ stetig, und da $\{z \mid |z| = r = 1\}$ kompakt, auf dieser Menge beschränkt ist.

Bei gleichmäßiger Konvergenz kann man Integral und Limes in der Cauchyschen Integralformel von Satz 18.8 vertauschen, also gilt für jedes b im Inneren des Einheitskreises mit Rand $S^1 \subset \mathbb{C}$

$$f(b) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{S^1}\frac{f(z)}{z^n}\,dz\, b^n.$$

Hier ist nun b als die Variable aufzufassen. Wir erkennen also, dass f im Inneren des Einheitskreises tatsächlich eine konvergente Potenzreihe ist. Als solche ist sie, wie wir in Diff I schon gelernt haben, beliebig oft (komplex) ableitbar, und die Koeffizienten sind gerade die Ableitungen am Entwicklungspunkt (dividiert durch $n!$). Die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge im Inneren des Einheitskreises. Da der abgeschlossene Einheitskreis selbst kompakte Teilmenge eines etwas größeren Kreises ist, der immer noch ganz in U enthalten ist, und mit dem die Potenzreihenentwicklung hätte durchgeführt werden können, ist die Konvergenz sogar gleichmäßig auf ganz D^2.

Es bleibt noch, die Integralformel zu beweisen. Durch Umstellen erhält man aus der Potenzreihenformel

$$\frac{f^{(n)}(a)}{z-a} = n!\left(\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} + \sum_{k\neq n}\frac{f^{(k)}(a)(z-a)^{k-n-1}}{k!}\right) \tag{18.12}$$

Nun gilt für $k \neq -1$, dass $(z-a)^k\,dz = \frac{1}{k+1}d((z-a)^{k+1})$ auf $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. Folglich ist für jeden Summanden auf der rechten Seite $\int_{\partial D_r(a)} f^{(k)}(a)(z-a)^{k-n-1} = 0$ (Satz von Stokes für ein Gebiet ohne Rand innerhalb der Mannigfaltigkeit $\partial D_r(a)$).

Da die Konvergenz in (18.12) für festes b gleichmäßig in z ist, erhält man durch gliedweise Integration aus Gleichung (18.12)

$$2\pi i\cdot f^{(n)}(b) = \int_{\partial D_r(a)}\frac{f^{(n)}(a)}{z-a}\,dz = n!\int_{\partial D_r(a)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

18.13 Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, und sein $D \subset U$ diskret (z.B. bestehend aus endlich vielen Punkten). Eine holomorphe Funktion $f : U \setminus D \to \mathbb{C}$ heißt *meromorphe* Funktion auf U, die Menge D heißt *Menge der Pole* von f.

18.14 Definition. Sei f eine meromorphe Funktion auf $U \subset \mathbb{C}$ und $p \in U$ ein Pol von f. Das *Residuum* von f in p ist definiert als

$$\operatorname{res}_p f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(p)} f(z)\, dz$$

für jedes r so dass die abgeschlossene Scheibe $D_r(p)$ in U enthalten ist und keinen weiteren Pol von f enthält.

Beweis. Es handelt sich um das Integral einer glatten 1-Form über ein Kompaktum, ist also definiert. Wählt man zwei verschiedene solche Kreise, bilden sie zusammen den Rand eines Kreisrings. Da f holomorph auf diesem Kreisring, sind die beiden Randintegrale gleich, und somit das Residuum wohldefiniert. □

18.15 Beispiel. $\operatorname{res}_0 \frac{1}{z} = 1$, $\operatorname{res}_a \frac{f(z)}{z-a} = f(a)$ für jede holomorphe Funktion f.

Der folgende Satz wird Residuensatz genannt. Er ist eine gemeinsame Verallgemeinerung von Cauchyschem Integralsatz und Integralformel.

18.16 Satz. *Sei f eine meromorphe Funktion auf $U \subset \mathbb{C}$ mit Polmenge D. Sei $\phi : D^2 \to U$ glatt, und $\phi(S^1) \cap D = \emptyset$. Dann gilt*

$$\int_{S^1} \phi^*(f\, dz) = 2\pi i \sum_{p \in D} u_\phi(p) \operatorname{res}_p(f),$$

wobei $u_\phi(p)$ die Umlaufzahl des Randes von $\phi(D)$ um p ist, wie in Satz 18.8 definiert.

Beweis. Der Beweis folgt dem Beweis der Cauchyschen Integralformel. Das Residuum ist gerade so definiert, dass es als Korrekturterm auftritt. □

Um den Residuensatz anwenden zu können, ist es also wichtig, Residuen berechnen zu können.

18.17 Satz. *Sei f eine meromorphe Funktion auf $U \subset \mathbb{C}$ mit Pol $a \in U$. Dann gibt es $r > 0$, so dass —mit gleichmäßiger Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von $D_r(a) \setminus \{a\}$—*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k (z-a)^k \qquad 0 < |z-a| \le r \tag{18.18}$$

mit eindeutig bestimmten

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz.$$

Es gilt $\operatorname{res}_a f = b_{-1}$.

Beweis. Die Formel für b_k erhält man, indem man in Gleichung (18.18) mit $(z-a)^{-(k+1)}$ multipliziert und dann über $\partial D_r(a)$ integriert. Wegen der gleichmäïsgen Konvergenz kann man unendliche Summe und Integral vertauschen, dann muss man nur noch die Rechnung aus dem Beweis von □

18.19 Lemma. *Seien $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$. Dann gilt*

$$\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

18.20 Beispiel. Mit Hilfe des Resiuensatzes kann man einige bestimmte Integale ausrechnen, die mit anderen Mitteln kaum erreichbar wären.

Sei $a > 1$, dann gilt $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = 2\pi/\sqrt{a^2-1}$.

Setze dazu $f(z) = \big(z(a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))\big)^{-1} = 2/(z^2 + 2az + 1)$. Dann gilt mit der Parametrisierung $\gamma(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

$$\int_{S^1} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \gamma^*(f\,dz) = \int_0^{2\pi} e^{-it}\frac{1}{a+\cos(t)} ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)}\,dt.$$

da $(e^{it} + e^{-it})/2 = \cos(t)$. Andererseits wegen des Residuensatzes

$$\int_{S^1} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_p \operatorname{res}_p f.$$

Da $a > 1$ hat $z^2+2az+1$ im dem Einheitskreis nur die Nullstelle $\alpha := \sqrt{a^2-1}-a$, ist also überall sonst holomorph. Die Ableitung des Nenners ist $2z + 2a$, diese hat an der Stelle α den Wert $2\sqrt{a^2-1}$, man erhält also für das Residum nach Lemma 18.19 $\operatorname{res}_\alpha f = 1/2\sqrt{a^2-1}$. Zusammengenommen ergibt sich die Behauptung.

Allgemeiner kann man Rationale Funktionen in $\cos(t)$ und $\sin(t)$ integrieren, wenn man sich erinnert, dass $(e^{it}+e^{-it})/2 = \cos(t)$ und $(e^{it}-e^{-it})/2i = \sin(t)$. Beim Integrieren geeigneter rationaler Funktionen in $(z+1/z)/2$ und $(z-1/z)/2i$ über S^1 erhält man also mit der Standard-Parametrisierung genau $\cos(t)$ und $\sin(t)$.

Für andere beliebte Beispiele muss man Grenzwertbetrachtungen anstellen und einige Teile des Integrationswegs vernachläßigen.

Man erhält zum Beispiel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Hierzu betrachte man zunächst das Integral $\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz$ mit $f(z) = 1/(1+z^4)$ und Γ_r der Weg, welcher von $-r$ bis $+r$ auf der reellen Achse verläuft, und dann im Halbkreis vom Radius r in der oberen Halbebene zurück. Mit dem Residuensatz (Nullstellen des Nenners berechnen!) erhält man für dieses Integral $\pi/\sqrt{2}$. Zu guter Letzt beobachtet man, dass man mit den offensichtlichen Parametrisierungen erhält

$$\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{(1+z^4)} = \int_{-r}^{r} \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+r^4e^{4it}} ire^{it}\,dt.$$

Für $r \to \infty$ ist der erste Summand das gewünschte Integral, während der zweite Summand gegen Null geht.

Literatur

[1] S. Brehmer and H. Haar. *Differentialformen und Vektoranalysis.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1973.

[2] Theodor Bröcker and Klaus Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie.* Springer-Verlag, Berlin, 1973. Heidelberger Taschenbücher, Band 143. 9

[3] Hans Grauert and Ingo Lieb. *Differential- und Integralrechnung. III: Integrationstheorie, Kurven - und Flchenintegrale, Vektoranalysis. 2., neubearb. und erw. Aufl.* Heidelberger Taschenbcher. Bd. 43. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. XIV, 210 S., 40 Abb. DM 19.80; $ 9.20 , 1977.

[4] Erhard Heil. *Differentialformen und Anwendungen auf Vektoranalysis, Differentialgleichungen, Geometrie.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1974.

[5] Klaus Jnich. *Vektoranalysis. (Vector analysis). 4. Aufl.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. xii, 275 S. EUR 19.95/net; sFr. 32.00 , 2003.

[6] Konrad Königsberger. *Analysis. 2.* Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, 1993. 16.4

[7] Hans-Joachim Kowalsky. *Vektoranalysis. I.* Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1974.

[8] Hans-Joachim Kowalsky. *Vektoranalysis. II.* Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1976. de Gruyter Lehrbuch.