

Knotentheorien und Wurzelsysteme

Teil II

Tammo tom Dieck

9. Februar 2009

In [2] haben wir damit begonnen, die Knotentheorie zur Coxeter-Dynkin-Serie B zu entwickeln. In dieser Arbeit setzen wir die Überlegungen fort. Dabei steht die Darstellungstheorie der B -Kategorien und der damit verbundenen Temperley-Lieb-Algebren und Hecke-Algebren im Vordergrund. Natürlich ist alles Folgende für die A -Knoten wohlbekannt. Es ist allerdings für eine verständliche und lesbare Darstellung erforderlich, einige Resultate in geeigneter Form zu wiederholen. In §1 beschreiben wir die Temperley-Lieb-Kategorien im Sinne von Turaev [10] durch Erzeugende und Relationen. Diese Beschreibung dient in §2 dazu, fundamentale Darstellungen zu konstruieren. Die fundamentale Darstellung der Kategorie wird in §3 dazu benutzt, im generischen Fall die irreduziblen Moduln der Algebra TB_n aus [2] als Untermoduln einer Tensorpotenzdarstellung zu erhalten. Das steht in Beziehung zur klassischen Schur-Weyl-Theorie. Wir beschreiben dabei ebenfalls entsprechende Darstellungen der Hecke-Algebra vom Typ B_n und auch der zugehörigen Zopfgruppen. Tensor Darstellungen der Hecke-Algebren vom Typ A lassen sich bekanntlich durch R -Matrizen (Yang-Baxter-Gleichung) erhalten. Der hier eingenommene geometrisch-kategorielle Standpunkt liefert eine Methode, die R -Matrix-Darstellungen von HA_{n-1} zu solchen von HB_n (mit beliebigen Parametern) zu erweitern. Solche Erweiterungen werden in §4 allgemein konstruiert. In diesem Zusammenhang sollte die Theorie von Dipper und James [5] angesehen werden. In §5 werden die Schlingelkategorien vom Typ B durch Erzeugende und Relationen beschrieben. In §6 werden daraufhin einige spezielle Darstellungen dieser Kategorien beschrieben. Dabei werden als Anwendung Quantenspuren auf Hecke-Algebren HB_n konstruiert. Durch längere Rechnungen innerhalb der Hecke-Algebra wurden solche Spuren in [8] gewonnen. Es ist allerdings begrifflich befriedigender und auch für Rechnungen ratsam, die Spuren als wirkliche Spuren der linearen Algebra sowie als Quantenspuren in Tensor-kategorien zu erklären. Der Nachweis der fundamentalen Spurkommutativität geschieht hier allerdings knotentheoretisch. Das liegt im Zuge der Entwicklung, für Tensor-kategorien eine graphische Beweismethode zu verwenden. Speziell liefert die Spur die Verallgemeinerung des FHMLOY-Polynoms in zwei Variablen auf B -Knoten.

1. Brückenkategorien

Wir definieren zunächst die Brückenkategorien und beschreiben sie danach durch Erzeugende und Relationen.

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Wir setzen $[+k] = \{1, \dots, k\}$. Für $k = 0$ ist darunter das leere Symbol zu verstehen. Sei $k+l = 2n$. Eine (k, l) -Brücke ist eine Isotopieklasse eines Systems von n glatten Bögen (= eingebetteten Intervallen) im Streifen $\mathbb{R} \times [0, 1]$ mit Endpunkten in $[+k] \times 0$, genannt „unten“, und in $[+l] \times 1$, genannt „oben“, die den Rand $\mathbb{R} \times \partial[0, 1]$ transvers treffen und sich nicht kreuzen. Eine Brücke wird zweckmäßig geometrisch veranschaulicht. Es handelt sich aber um ein kombinatorisches Objekt: Eine Brücke ist vollständig dadurch bestimmt, daß angegeben wird, welche Punkte jeweils durch die Bögen verbunden werden. Es handelt sich also um fixpunktfreie Involutionen von $[+k] \times 0 \cup [+l] \times 1$ mit der Zusatzbedingung, die sich durch das Nichtkreuzen der Bögen ergibt¹.

Mit Hilfe der Brücken definieren wir vier Kategorien $TA, TB, T^\circ A, T^\circ B$. Der Buchstabe T erinnert an die Temperley-Lieb-Algebra; die Buchstaben A und B erinnern an die Coxeter-Dykin-Diagramme vom Typ A und B ; der Kreis oben bezeichnet orientierte Versionen.

Sei K ein kommutativer Ring. Die Kategorie TA hat als Objekte die Symbole $[+k]$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Die Menge der Morphismen von $[+k]$ nach $[+l]$ ist der freie K -Modul über den (k, l) -Brücken. Im Fall $k = l = 0$ wird K als Morphismenmodul definiert; die leere Brücke ist das Basiselement, das mit $1 \in K$ identifiziert wird. Die Komposition ist definitionsgemäß bilinear und braucht deshalb nur für Paare von Brücken definiert zu werden. Ist S eine (k, l) -Brücke und T eine (l, m) -Brücke, so setzen wir T über S . Die resultierende Figur im Streifen $\mathbb{R} \times [0, 2]$ wird linear auf $\mathbb{R} \times [0, 1]$ gestaucht und dann TS genannt. Die Figur TS enthalte $l(T, S)$ Zyklen im Innern des Streifens. Sei $T \wedge S$ die nach Beseitigung dieser Zyklen verbleibende (k, m) -Brücke. Wir definieren die Komposition in der Kategorie TA durch

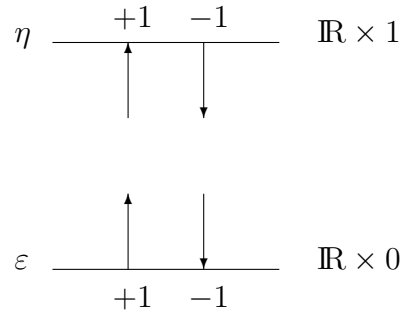
$$T \circ S = d^{l(T,S)} T \wedge S.$$

Darin ist $d \in K$ ein zunächst beliebig gewählter Parameter. Im Falle $0 < k$ wird die Identität von $[+k]$ durch die Brücke repräsentiert, die j oben jeweils mit j unten verbindet; im Fall $k = 0$ ist das Einselement von K , bzw. die leere Brücke, die Identität von $[+0]$. Indem wir $[+k] \otimes [+l] = [(k+l)]$ setzen und entsprechend Brücken nebeneinandersetzen, wird in TA ein Tensorprodukt definiert und TA damit zu einer strikten Tensorkategorie (siehe auch den fünften Abschnitt). Die Endomorphismenalgebra von $[+n]$ werde mit TA_{n-1} oder $T[n]$ bezeichnet; es ist eine Temperley-Lieb-Algebra.

Es gibt eine orientierte Version $T^\circ A$ der Kategorie TA . Eine orientierte Brücke ist eine Brücke, in der die Brückenbögen orientiert sind. Die Objekte von $T^\circ A$ sind Funktionen $\varepsilon: [+k] \rightarrow \{\pm 1\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wir notieren solche Funktionen auch als Sequenzen von Vorzeichen $\{\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots\}$. Eine Brücke von $\varepsilon: [+k] \rightarrow \{\pm 1\}$

¹Die Permutationen der leeren Menge bestehen aus einem Element — offenbar eine fixpunktfreie Involution.

nach $\eta: [+l] \rightarrow \{\pm 1\}$ ist eine orientierte (k, l) -Brücke, bei der die Orientierungen der Bögen mit den Vorzeichen wie in der folgenden Figur korrelieren.



Wir sprechen dann auch von einer (ε, η) -Brücke. Die Morphismenmenge $Mor(\varepsilon, \eta)$ ist wiederum der freie K -Modul über den (ε, η) -Brücken. Komposition und Tensorprodukt werden wie vordem definiert. Damit wird $T^\circ A$ zu einer strikten Tensor-kategorie.

Aber halt! Wir können Zyklen nach ihrem Drehsinn unterscheiden. Es gebe in TS etwa $l(T, S, +)$ positiv orientierte und $l(T, S, -)$ negativ orientierte. Wir fixieren Parameter $d_+, d_- \in K$ und definieren die Komposition durch

$$T \circ S = d_+^{l(T, S, +)} d_-^{l(T, S, -)} T \wedge S.$$

In diesem Fall erhält man zum Beispiel als Endomorphismenalgebra der alternierenden Sequenz $(+1, -1, +1, \dots)$ eine Temperley-Lieb-Algebra, die von zwei Parametern d_+, d_- abhängt.

Unser eigentliches Anliegen in dieser Arbeit sind die Kategorien von symmetrischen Brücken. Wir setzen

$$[\pm k] = \{-k, \dots, -1, 1, \dots, k\}.$$

Eine *symmetrische* (k, l) -Brücke S ist ein System von $k + l$ glatten Bögen im Streifen $\mathbb{R} \times [0, 1]$ mit Endpunkten in $[\pm k] \times 0$ und in $[\pm l] \times 1$, die den Rand $\mathbb{R} \times \partial[0, 1]$ transvers treffen, die sich nicht kreuzen und die folgende $\mathbb{Z}/2$ -Äquivarianzeigenschaft haben: Verbindet S einen Wert x mit einem Wert y (oben oder unten), so auch $-x$ mit $-y$. Brücken dieser Art werden wieder bis auf Isotopie betrachtet; deshalb ist eine Brücke vollständig dadurch bestimmt, welche Paare von Elementen aus $P(k, l) := [\pm k] \times 0 \cup [\pm l] \times 1$ sie verbindet. Demnach ist eine symmetrische Brücke eine freie Involution von $P(k, l)$ mit den Zusatzbedingungen, die sich durch Äquivarianz und Nichtkreuzen der Bögen ergeben. Geometrisch stellen wir uns eine symmetrische Brücke als ein in Bezug auf die Achse $0 \times [0, 1]$ spiegelsymmetrisches System von Bögen vor ($\mathbb{Z}/2$ -Äquivarianz). Ein Bogen, der zwei obere (bzw. zwei untere) Punkte verbindet, heiße *horizontal*, andernfalls *vertikal*.

Aus den symmetrischen Brücken bilden wir eine Kategorie TB . Wir fixieren $c, d \in K$. Die Objekte sind $[\pm n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$, und die Morphismen $[\pm m] \rightarrow$

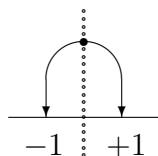
$[\pm n]$ sind die Elemente des freien K -Moduls der symmetrischen (m, n) -Brücken. Die Komposition ist K -bilinear. Für zwei Basiselemente verfahren wir wie im Fall TA : Sei S eine symmetrische (k, l) -Brücke und T eine symmetrische (l, m) -Brücke. Wir setzen T über S und stauchen das Resultat auf Einheitslänge zurück. Das Ergebnis enthalte etwa $k(T, S)$ Bahnen von Zyklen, die $\mathbb{Z}/2$ -fest sind, und $l(T, S)$ Bahnen, die $\mathbb{Z}/2$ -frei sind. Sei $T \wedge S$ die symmetrische Brücke, die nach Beseitigung der Zyklen verbleibt. Wir erklären die Komposition der Morphismen S und T durch

$$T \circ S = e^{k(T,S)} d^{l(T,S)} T \wedge S.$$

Wir bezeichnen mit TB_n die Endomorphismenalgebra von $[\pm n]$ in dieser Kategorie. Eine Beschreibung durch Erzeugende und Relationen sowie die generische Struktur dieser Algebra wurde in [2] angegeben (siehe auch (3.1)).

Wir erhalten eine Inklusion $TA \subset TB$ durch symmetrische Verdoppelung gewöhnlicher Brücken. Allgemeiner: Indem wir eine gewöhnliche Brücke rechts und links symmetrisch neben eine symmetrische Brücke legen, erhalten wir eine Operation von TA auf TB , die TB zu einer strikten Tensormodulkategorie über TA macht. Zu dieser Begriffsbildung siehe [4].

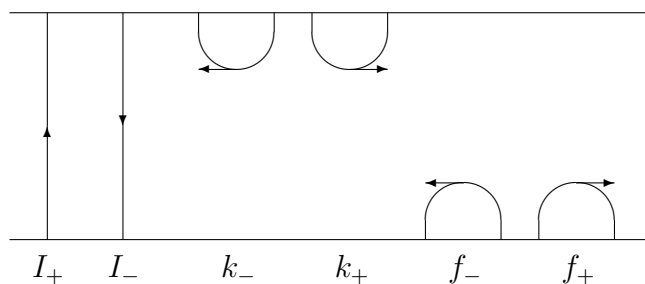
Schließlich können wir zu TB auch noch die orientierte Version $T^\circ B$ betrachten. Die Objekte sind jetzt Funktionen $\varepsilon: [\pm k] \rightarrow \{\pm 1\}$ mit $\varepsilon(-j) = \varepsilon(j)$. Alles Weitere läuft wie vordem. Die Komposition wird jetzt allerdings mit vier Parametern d_\pm und c_\pm definiert, um auf die Orientierung der Zyklen Rücksicht zu nehmen. Wie vordem gehören d_\pm zu den \pm -orientierten verdoppelten A -Zyklen und c_\pm zu den $\mathbb{Z}/2$ -festen Zyklen (siehe (1.2) und (1.4)). Die Orientierung der Brückenbögen sei mit der Spiegelung verträglich. Das verlangt die folgende Festlegung, wenn der Bogen die Spiegelachse trifft.



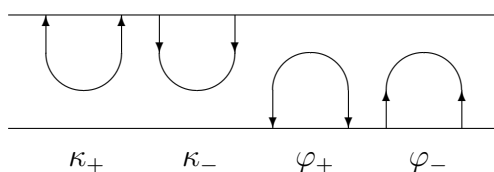
Die Spiegelachse ist punktiert gezogen. Es ist in diesem Kontext nicht verkehrt, nur die $\mathbb{Z}/2$ -Bahnen zu betrachten. Dann hat man es im vorliegenden Fall nur mit Halbbögen zu tun.

Wir kommen nun zur Beschreibung der Kategorien durch Erzeugende und Relationen im Sinne von Reshetikhin und Turaev [10, 9].

In der folgenden Figur notieren wir sechs Erzeugende der Kategorie $T^\circ A$ der orientierten Brücken. Die Morphismen laufen von unten nach oben. Der Pfeil gibt die Orientierung an. Darunter stehen abkürzende Symbole: I steht für Identität, k für Kopf und f für Fuß. Zum Prozess der Erzeugung in der Kategorie gehören Komposition und Tensorprodukt.

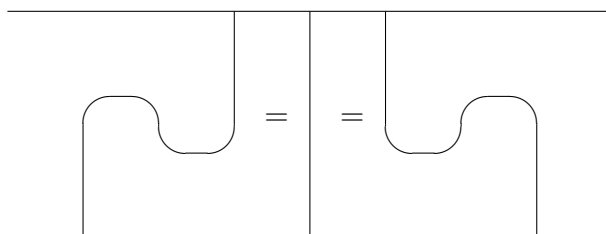


Die Erzeuger der Kategorie $T^\circ B$ als Modulkategorie über $T^\circ A$ sind einmal die schon angegebenen Erzeuger für die letztere. Dazu kommen noch die Erzeuger der nächsten Figur, die als symmetrische Brücken zu lesen sind.



Im Falle von TA und TB lassen wir \pm in den Symbolen weg; es gibt dann nur die halbe Anzahl von Erzeugern.

Wir kommen nun zu den Relationen zwischen den angegebenen Erzeugern. Zunächst für die Kategorie TA ; wir bilden die relevante Figur ab.



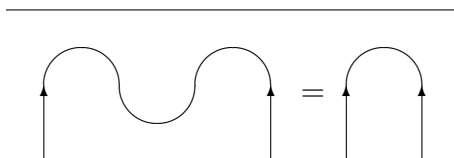
Im Fall von $T^\circ A$ muß man sich die Figuren noch mit Orientierungen versehen denken. In Formeln lauten diese Relationen wie folgt (im Falle von $T^\circ A$):

$$(1.1) \quad (f_\pm \otimes I_\pm)(I_\pm \otimes k_\pm) = I_\pm, \quad (I_\pm \otimes f_\pm)(k_\pm \otimes I_\pm) = I_\pm.$$

Ferner bestehen die algebraischen Relationen

$$(1.2) \quad I_\pm = \text{id} = 1, \quad f_- k_+ = d_+, \quad f_+ k_- = d_-.$$

Zu den Relationen in $T^\circ A$ kommen in $T^\circ B$ noch die folgenden hinzu



sowie die sich daraus durch Stürzen und durch Änderung der Orientierung ergebenden. In Formeln lauten diese Relationen:

$$(1.3) \quad \kappa_{\pm} = (\varphi_{\pm} \otimes I_{\pm}) \circ k_{\pm}, \quad \varphi_{\pm} = f_{\pm} \circ (\kappa_{\pm} \otimes I_{\mp}).$$

Die algebraischen Relationen

$$(1.4) \quad \varphi_- \kappa_+ = c_+, \quad \varphi_+ \kappa_- = c_-$$

kommen noch hinzu. Für die Kategorien TA und TB bestehen dieselben Relationen ohne die \pm -Zeichen.

Die geometrische Definition dieser Kategorien enthält eine Positivität: Die Kategorien

$$TA, TB, T^{\circ}A, T^{\circ}B$$

können über

$$K = \mathbb{Z}[d], \mathbb{Z}[c, d], \mathbb{Z}[d_+, d_-], \mathbb{Z}[d_+, d_-, c_+, c_-]$$

definiert werden. Für genauere Informationen über diese Kategorien siehe auch [4].

2. Darstellungen von Brückenkategorien

Eine K -Kategorie hat als Morphismenmengen zwischen zwei Objekten einen K -Modul und die Komposition ist bilinear. Eine Darstellung einer solchen Kategorie ist ein Funktor in eine Kategorie von K -Moduln, der Morphismenmengen K -linear abbildet. Wir betrachten solche Funktoren von den im ersten Abschnitt definierten Kategorien, die außerdem mit dem Tensorprodukt verträglich sind. Die Funktoren sind vollständig durch ihre Werte auf den erzeugenden Objekten und Morphismen bestimmt; sie müssen darüber hinaus die Relationen (1.1) – (1.4) zwischen den Erzeugern respektieren. Wir beginnen mit Funktoren auf den Kategorien TA und TB . Tensorprodukte von Moduln und Morphismen bezeichnen wir gelegentlich durch einfaches Nebeneinanderschreiben, also etwa $v \otimes w = vw \in V \otimes W = VW$.

Ein Funktor von TA ordne dem Objekt $[+1]$ einen freien K -Modul V mit der Basis v_0, \dots, v_n zu. Die Verträglichkeit mit dem Tensorprodukt bedeutet unter anderem, daß $[+r]$ das r -fache Tensorprodukt $V^{\otimes r}$ von V mit sich zugeordnet wird. Für $k = 0$ ist darunter der Grundring K zu verstehen. Die Werte auf den Morphismen k und f bezeichnen wir wieder mit diesen Buchstaben:

$$k: K \rightarrow VV, \quad 1 \mapsto \sum k_{ij} v_i v_j$$

$$f: VV \rightarrow K, \quad v_i v_j \mapsto f_{ij}.$$

Die Relationen (1.1) besagen, daß die Matrizen $k = (k_{ij})$ und $f = (f_{ij})$ zueinander invers sind. Ferner gilt die algebraische Relation (1.2) $d = \text{Spur}(f \circ k^t)$, worin k^t die transponierte Matrix von k ist.

Im Falle von TB haben wir außerdem

$$\begin{aligned}\kappa: K &\rightarrow V, & 1 &\mapsto \sum \kappa_j v_j \\ \varphi: V &\rightarrow K, & v_j &\mapsto \varphi_j.\end{aligned}$$

Die zusätzlichen Relationen (1.3) besagen:

$$(\kappa_1, \dots, \kappa_n)(f_{ij}) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

und aus (1.4) wird $c = \sum \varphi_j \kappa_j := \langle \varphi, \kappa \rangle$.

(2.1) Das fundamentale Beispiel. Wir beschreiben ein für die gesamte Theorie grundlegendes Beispiel. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß K eine Quadratwurzel i aus -1 enthält sowie eine Einheit A . Ferner sei $A = \gamma^2$ in K . Dann setzen wir

$$f = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 \\ -\gamma^{-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^2 \\ \gamma^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

d. h. f wirkt durch $v_0 v_1 \mapsto \gamma^2$, $v_1 v_0 \mapsto -\gamma^{-2}$, $v_j v_j \mapsto 0$ und k durch $1 \mapsto -\gamma^2 v_0 v_1 + \gamma^{-2} v_1 v_0$. Damit wird $d = -\gamma^4 - \gamma^{-4} = -A^2 - A^{-2}$, wie in der Kauffmanschen Theorie [7] üblich. (Dadurch ist die Parameterwahl A diktiert.) Es gilt ferner

$$\begin{aligned}(\gamma^{-1}, -i\gamma)f &= i(\gamma^{-1}, -i\gamma) \\ (\gamma^{-1}, i\gamma)f &= -i(\gamma^{-1}, i\gamma).\end{aligned}$$

Wir setzen deshalb

$$(\kappa_0, \kappa_1) = (i\gamma^{-1}, \gamma), \quad (\varphi_0, \varphi_1) = (\gamma^{-1}, -i\gamma).$$

Damit ergibt sich der Parameter $c = -i\gamma^2 + i\gamma^{-2} = -i(A - A^{-1})$. Würden wir stattdessen den $(-i)$ -Eigenvektor von f verwenden, so ergäbe sich der Parameter $c = i(A - A^{-1}) = iA + (iA)^{-1}$. \heartsuit

Für das vorstehende Beispiel genügt es, die Theorie TA über $K = \mathbf{Z}[A, A^{-1}]$ und die Theorie TB über $K = \mathbf{Z}[i][A^{1/2}, A^{-1/2}]$ zu definieren.

Die obige Wahl für f hat den folgenden tieferen Grund. Wir betrachten den Modul V als Darstellung der Quantengruppe $U = U_t(sl_2)$ mit $t = A^2$ und $t^2 \neq 1$. Dabei ist U die assoziative K -Algebra, die von X, Y, Z, Z^{-1} mit den Relationen $ZZ^{-1} = 1 = Z^{-1}Z$ und

$$ZXZ^{-1} = t^2 X, \quad ZYZ^{-1} = t^{-2} Y, \quad XY - YX = (Z - Z^{-1})(t - t^{-1})^{-1}$$

erzeugt wird und die die Komultiplikation

$$\mu(X) = X \otimes Z + 1 \otimes X, \quad \mu(Y) = Y \otimes 1 + Z^{-1} \otimes Y, \quad \mu(Z) = Z \otimes Z$$

hat.² Die Erzeuger operieren auf V in der Basis v_0, v_1 durch

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

²Die Elemente X, Y, Z werden üblicherweise E, F, K genannt.

und auf $V \otimes V$ durch Verwendung der Komultiplikation. Die folgende Tabelle stellt zusammen, was letzteres explizit bedeutet.

	v_0v_0	v_0v_1	v_1v_0	v_1v_1
X	0	v_0v_0	tv_0v_0	$t^{-1}v_0v_1 + v_1v_0$
Y	$t^{-1}v_0v_1 + v_1v_0$	v_1v_1	tv_1v_1	0
Z	$t^2v_0v_0$	v_0v_1	v_1v_0	$t^{-2}v_1v_1$

Die Koeins

$$\varepsilon: U \rightarrow K, \quad \varepsilon(X) = \varepsilon(Y) = 0, \quad \varepsilon(Z) = 1$$

macht K zum trivialen U -Modul. Mit diesen Daten verifiziert man leicht:

(2.2) Lemma. *Morphismen $k': K \rightarrow VV$ und $f': VV \rightarrow K$ sind genau dann U -linear, wenn sie skalare Vielfache der in (2.1) genannten Morphismen sind. \square*

Diese Tatsache hat eine wichtige Konsequenz. Sei $\mathcal{T}(A)$ die Kategorie mit Morphismenmenge \mathbb{N}_0 und $\text{Mor}_{\mathcal{T}(A)}(m, n) = \text{Hom}_U(V^{\otimes m}, V^{\otimes n})$. Dann liefern die obigen Daten einen Funktor

$$\Phi: TA \rightarrow \mathcal{T}(A).$$

Er ist grundlegend für die feinere kombinatorische Theorie der U -Darstellungen, wie der nächste Satz lehrt. Die Erweiterung auf TB hat allerdings zunächst nichts mit U -Darstellungen zu tun. Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [4].

(2.3) Satz. *Sei K der Funktionenkörper $\mathbb{Q}(t)$. Dann ist Φ ein Isomorphismus.*

(2.4) Beispiel. Wir geben noch ein Beispiel in höheren Dimensionen. Wir setzen mit einer Einheit $\alpha \in K$

$$\begin{aligned} k(1) &= \sum_{j=0}^n \alpha^{2n-4j} v_j v_{n-j}, \\ f(v_r v_s) &= \delta_{r,n-s} \alpha^{2n-4r}. \end{aligned}$$

Die Matrizen von k und f sind dann gleich und zu sich selbst invers. Hier ergibt sich die Spur zu

$$d = \sum_{k=0}^n \alpha^{4n-4k} = [n+1](\alpha^4),$$

wobei wir wie üblich für die Quantenzahl

$$(2.5) \quad [n](q) = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

setzen. Ferner gilt $(\alpha^n, \alpha^{n-1}, \dots, \alpha^{-n})f = (\alpha^n, \dots, \alpha^{-n})$. Deshalb setzen wir $\varphi_j = \kappa_j = \alpha^{n-j}$. Es gilt $c = [n+1](\alpha^2)$. Im Fall $n = 1$ ergibt sich hier übrigens eine gegenüber (2.1) leicht veränderte Darstellung. \heartsuit

Wir kehren zu den allgemeinen Darstellungen zurück und begründen das Beispiel (2.1) noch auf andere Weise. Dazu betrachten wir Isomorphismen von Darstellungen, wobei wir den Fall der Kategorie TB ausführen. Nach dem Vorstehenden ist ein Funktor der hier betrachteten Art vollständig durch die Daten (V, k, κ) bestimmt. Sei (V', k', κ') ein zweiter Funktor. Ein linearer Isomorphismus

$$B: V \rightarrow V', \quad v_k \mapsto \sum_l b_{lk} v'_l$$

ist ein Isomorphismus von Funktoren, wenn gilt:

$$(2.6) \quad f = f' \circ (B \otimes B), \quad (B \otimes B) \circ k = k', \quad \varphi' \circ B = \varphi, \quad B \circ \kappa = \kappa'.$$

Bezeichnen wir mit B auch die Matrix (b_{ij}) , so lauten diese Relationen:

$$(2.7) \quad BkB^t = k', \quad B^t f' B = f, \quad \kappa B^t = \kappa', \quad \varphi' B = \varphi.$$

Die Relationen für f und φ folgen aus denen für k und κ . Um die Isomorphieklassen von Funktoren zu bestimmen, muß man also die Klassen von Matrizen bei der Relation $k \sim BkB^t$ kennen; das ist die Äquivalenz von Bilinearformen.

(2.8) Beispiel. Wir betrachten $(2, 2)$ -Matrizen über den komplexen Zahlen unter der eben genannten Äquivalenzrelation. Für $C \in GL(2, \mathbb{C})$ setzen wir $d(C) = \text{Spur}(C(C^t)^{-1})$. Dann ist $d(C) = d(C')$, falls $C' = B^t C B$ für ein $B \in GL(2, \mathbb{C})$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (1) Es gibt eine Basis v_0, v_1 von \mathbb{C}^2 , so daß $v_j C v_j^t = 0$ ist für $j = 0, 1$.
- (2) Es gibt keine solche Basis.

Im ersten Fall ist C zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent; und zwei Matrizen C, C' dieser Art sind genau dann äquivalent, wenn $d(C) = d(C')$ ist. Im zweiten Fall ist C zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent. Ist $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist $d(C) = 2 - (b - c)^2 \det(C^{-1})$.

Wir erhalten also im ersten Fall genau die Situation aus (2.1). Ferner folgt aus $B^t C B = C$ und $\lambda^2 \neq 1$, daß B eine Diagonalmatrix ist, wenn $\det B = 1$ ist. Man kann dann den Vektor κ nur noch unwesentlich verändern. \heartsuit

Wir beschreiben nun die Varianten, die sich bei den Kategorien $T^\circ A$ und $T^\circ B$ ergeben: Zunächst die Daten, dann die Relationen.

(2.9) Funktordaten.

- (1) Freie Moduln V, W^* als Bild der Objekte $+1, -1$. Das Bild von \emptyset ist K .

- (2) K -lineare Abbildungen als Bild der erzeugenden Morphismen, die wir ebenso bezeichnen.

$$\begin{aligned} f_+ &: VW^* \rightarrow K, & v_i w^j &\mapsto f_i^j \\ f_- &: W^*V \rightarrow K, & w^i v_j &\mapsto f_j^i(-) \\ k_+ &: K \mapsto W^*V, & 1 &\mapsto \sum k_i^j w^i v_j \\ k_- &: K \rightarrow VW^*, & 1 &\mapsto \sum k_i^j(-) v_j w^i. \end{aligned}$$

Wir haben hierbei feste Basen (v_i) von V und (w^j) von W^* zugrunde gelegt; wir interpretieren W^* als Dualraum von W mit der Dualbasis (w_j) . Tensorprodukte werden wiederum durch Nebeneinanderschreiben notiert. Diesen Daten sind basisinvariant die folgenden linearen Abbildungen zugeordnet:

$$\begin{aligned} (3) \quad w_- &: V \rightarrow W, & v_i &\mapsto \sum f_i^j(-) w_j \\ (4) \quad w_+ &: V \rightarrow W, & v_i &\mapsto \sum f_i^j w_j \\ (5) \quad v_- &: W \rightarrow V, & w_i &\mapsto \sum k_i^j(-) v_j \\ (6) \quad v_+ &: W \rightarrow V, & w_i &\mapsto \sum k_i^j v_j. \end{aligned}$$

(2.10) Satz. *Die vorstehenden Daten liefern genau dann einen Tensorfunktorkontrahierungsfunktor von $T^\circ A$, wenn gilt:*

- (1) v_+, w_+ sind zueinander invers.
- (2) v_-, w_- sind zueinander invers.
- (3) $\text{Spur}(w_- v_+) = d_+$.
- (4) $\text{Spur}(w_+ v_-) = d_-$. □

(2.11) Zusätzliche Funktordaten im Falle $T^\circ B$.

- (1) $\kappa_+ : K \rightarrow V, \quad 1 \mapsto \sum \kappa^i v_i$
- (2) $\kappa_- : K \rightarrow W^*, \quad 1 \mapsto \sum \kappa_i(-) w^i$
- (3) $\varphi_+ : W^* \rightarrow K, \quad w^i \mapsto \varphi^i$
- (4) $\varphi_- : V \rightarrow K, \quad v_i \mapsto \varphi_i(-)$.

Wir führen damit die folgenden Vektoren ein: $\varphi(+) = \sum f^i w_i \in W$, $\kappa(+) = \sum k^i v_i \in V$, $\varphi(-) = \sum \varphi_i(-) v^i \in V^*$, $\kappa(-) = \sum \kappa_i(-) w^i \in W^*$. ♡

(2.12) Satz. *Mit den bislang eingeführten Daten wird genau dann ein Tensorfunktorkontrahierungsfunktor von $T^\circ B$ definiert, wenn zusätzlich zu (2.10) gilt: $v_+(\varphi(+)) = \kappa(+)$, $w_+(\kappa(+)) = \varphi(+)$, $v_-(\varphi(-)) = \kappa(-)$, $w_-(\kappa(-)) = \varphi(-)$, $\langle \varphi(-), \kappa(+)\rangle = c_+$, $\langle \kappa(-), \varphi(+)\rangle = c_-$.* □

Wir überlegen uns nun, daß wir die Funktordaten in eine Normalform überführen können, d. h. wir betrachten Isomorphismen von Funktoren.

(2.13) Notiz. *Sind $v: \bar{V} \rightarrow V$ und $w: \bar{W} \rightarrow W$ Isomorphismen, so liefern die Daten \bar{V}, \bar{W} und*

$$\begin{aligned} \bar{w}_- &= w^{-1} w_- v \\ \bar{w}_+ &= w^{-1} w_+ v \\ \bar{v}_- &= v^{-1} v_- w \\ \bar{v}_+ &= v^{-1} v_+ w \end{aligned}$$

wiederum ein System, das den Relationen genügt und das deshalb eine Darstellung \overline{F} definiert. Wir nennen darum (v, w) einen Isomorphismus von Funktoren $\overline{F} \rightarrow F$. Dieses gilt im Falle $T^\circ A$. Für Funktoren von $T^\circ B$ setzen wir zusätzlich

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(+) &= w^{-1}\varphi(+) \\ \overline{\varphi}(-) &= v^*\varphi(-) \\ \overline{\kappa}(+) &= v^{-1}\kappa(+) \\ \overline{\kappa}(-) &= w^*\kappa(-)\end{aligned}$$

und erhalten zusammen mit \overline{w}_\pm und \overline{v}_\pm einen neuen Funktor. \square

Wählen wir im Vorangehenden speziell $\overline{V} = V$, $\overline{W} = V$, $v = \text{id}$ und $w = w_-$, so erhalten wir einen Funktor mit den Daten $V = W$, sowie $\overline{v}_- = \overline{w}_- = \text{id}$. Alles Weitere ist dann durch v_+ bestimmt. Solche Funktoren wollen wir *normiert* nennen. Jeder Funktor ist also zu einem normierten isomorph, und die Isomorphieklassen der normierten Funktoren mit gegebenen V entsprechen den Konjugationsklassen von Automorphismen in $\text{Aut}(V)$. Für einen durch $v = v_+$ gegebenen normierten Funktor bedeuten übrigens (3) und (4) in (2.10) $\text{Spur}(v^{-1}) = d_-$ und $\text{Spur}(v) = d_+$. Im Falle von $T^\circ B$ gilt für einen normierten Funktor $\varphi(-) = \kappa(-)$. Es ist dann alles durch die Daten $(V, v = v_+, \kappa(\pm))$ bestimmt. Es gilt ferner $\langle \kappa(-), \kappa(+) \rangle = c_+$, $\langle \kappa(-), v^{-1}\kappa(+) \rangle = c_-$.

Als Ergänzung des Vorhergehenden erwähnen wir noch eine *Protoalgebra*, die an anderer Stelle zur Untersuchung der verschiedenen Temperley-Lieb-Algebren dienen soll. Die Algebra hat der Erzeuger e_1, \dots, e_n und die Relationen

$$\begin{aligned}e_j^2 &= d_j e_j \\ e_i e_j &= e_j e_i & |i - j| > 1 \\ e_{i+1} e_i e_{i+1} &= \alpha_i e_{i+1} & 1 \leq i \leq n - 1.\end{aligned}$$

Diese Algebra hat den Rang $(n + 1)!$. In dieser Algebra kann man wiederum induktiv Idempotente herstellen.

(2.14) Satz. *Es gibt in der Protoalgebra eine Serie f_0, f_1, \dots, f_n von Idempotenten mit den folgenden Eigenschaften:*

- (1) $f_0 = 1$
- (2) $(e_{m+1} f_m)^2 = a_{m+1} (e_{m+1} f_m)$, $0 \leq m < n$
- (3) $f_m = f_{m-1} + b_m f_{m-1} e_m f_{m-1}$, $1 \leq m \leq n$
- (4) $e_j f_m = f_m e_j = 0$, $1 \leq j \leq m$.

Die Konstanten a_m und b_m genügen den folgenden Rekursionsformeln: $a_1 = d_1$, $a_{m+1} = d_{m+1} - \alpha_m a_m^{-1}$, $b_m = -a_m^{-1}$.

Zum Beweis des Satzes wird das folgende Lemma verwendet.

(2.15) Lemma. *Seien x, e, f Elemente einer K -Algebra, die den folgenden Relationen genügen:*

$$f^2 = f, \quad xf = fx, \quad x^2 = dx, \quad xex = \alpha x, \quad (ef)^2 = aef$$

mit $\alpha, a, d \in K$. Dann folgt:

- (1) $g = f - a^{-1}fef$ ist ein idempotentes Element.
- (2) $(xg)^2 = (d - \alpha a^{-1})(xg)$.
- (3) $eg = ge = 0$. □

Zum Beweis des vorigen Satzes benutzt man im Lemma die folgenden Daten:

$$\frac{f \mid e \mid x \mid a \mid \alpha \mid d}{f_{m-1} \mid e_m \mid e_{m+1} \mid a_m \mid \alpha_m \mid d_{m+1}}.$$

Sind alle α_j gleich 1, so werden die a_j durch eine Kettenbruchentwicklung in den d_k gegeben, $a_m = [d_m, \dots, d_1]$. Diese Algebra hat offenbar auch eine geometrische Veranschaulichung durch Brücken.

3. Der fundamentale Modul

Eine Darstellung der Kategorie TA oder TB liefert insbesondere Moduln der Endomorphismenalgebren aller Objekte $[+n]$ oder $[\pm n]$. Wird dem Objekt $[\pm 1]$ der Modul V zugeordnet, so erhalten wir eine TB_n -Modulstruktur auf dem n -fachen Tensorprodukt

$$V(n) = V \otimes \cdots \otimes V.$$

Wie vorher hat V die Basis v_0, v_1 und in $V(n)$ verwenden wir die lexikographische Anordnung der Tensorprodukte dieser Basisvektoren. Wir haben in [2] gezeigt, daß die Endomorphismenalgebra TB_n als assoziative K -Algebra mit 1 von Elementen e_0, \dots, e_{n-1} mit den Relationen

$$(3.1) \quad \begin{aligned} e_0^2 &= ce_0 \\ e_i^2 &= de_i & i > 0 \\ e_i e_j &= e_j e_i & |i - j| \geq 2 \\ e_i e_j e_i &= e_i & |i - j| = 1, \quad i, j \geq 1 \\ e_1 e_0 e_1 &= ce_1 \end{aligned}$$

erzeugt wird. Ferner wurde dort gezeigt, daß TB_n den Rang $\binom{2n}{n}$ über K hat.

Ist eine Darstellung von TB gegeben, so operiert TB_n wie folgt auf $V(n)$: Das Element e_0 wirkt als $\kappa \circ \varphi \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$; während e_j für $j > 0$ als $1 \otimes \cdots \otimes kf \otimes \cdots \otimes 1$ operiert, wobei hierin kf auf den Faktoren j und $j + 1$ wirkt. Der fundamentale TB_n -Modul $V(n)$ ergibt sich aus der fundamentalen Darstellung (2.1). In diesem Falle ist bei der Wahl des Parameters $c = -i(A - A^{-1})$

$$(3.2) \quad C = \kappa \varphi = \begin{pmatrix} iA^{-1} & 1 \\ 1 & -iA \end{pmatrix}$$

und

$$(3.3) \quad B = kf = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -A^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen in diesem Kontext $p = -A^2$. Mit den vorstehenden Daten kann man übrigens direkt nachrechnen, daß ein TB_n -Modul vorliegt, indem man die Relationen (3.1) der Algebra verifiziert. Wir führen eine derartige Rechnung in einem etwas allgemeineren Fall teilweise durch. Sei

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Wann wird dadurch mit der obigen Matrix B die Struktur eines TB_n -Moduls auf $V(n)$ definiert? Genau dann, wenn die Relationen $C^2 = cC$ und $B(C \otimes 1)B = cB$ erfüllt sind (erste und letzte Gleichung in (3.1)). Die erste Gleichung besagt $\det C = 0$ und $a + y = c$, und die zweite Gleichung ist mit $c = pa + p^{-1}y$ immer erfüllt. Aus diesen beiden Gleichungen für c errechnen sich die Werte $a = iA^{-1}$ und $y = -iA$. Die Parameter b und x sind beliebig, mit der Nebenbedingung $bx = 1$ in diesem Fall. Wenn man c nicht weiter fixiert, so können a und y noch mit demselben Skalar α multipliziert werden, und es muß dann $bx = \alpha^2$ gelten.

Die Algebra TB_n ist ein Quotient der Hecke-Algebra HB_n , siehe [2]. Wir beschreiben den fundamentalen Modul als Modul über HB_n . Dabei ist $HB_n(q, Q)$ die assoziative Algebra über K , die von x_0, \dots, x_{n-1} erzeugt wird mit den Relationen

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x_j^2 &= (q-1)x_j + q, & 1 \leq j \leq n-1 \\ x_0^2 &= (Q-1)x_0 + Q \\ x_i x_j x_i &= x_j x_i x_j, & |i-j| = 1, i, j \geq 1 \\ x_i x_j &= x_j x_i, & |i-j| \geq 2 \\ x_0 x_1 x_0 x_1 &= x_1 x_0 x_1 x_0. \end{aligned}$$

Hier muß Q wie in [5] keine Einheit sein. In [2] war dabei $HB_n = HB_n(A^4, -A^2)$. Wir definieren zunächst eine Darstellung der Zopfgruppe ZB_n mit den Erzeugern x_0, x_1, \dots, x_{n-1} und den letzten drei Relationen in (3.4) auf $V(n)$. Darstellungen der Artinschen Zopfgruppe ZA_{n-1} lassen sich bekanntlich aus sogenannten R -Matrizen erhalten. Spezialisiert auf unseren Fall sei $X: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ ein Isomorphismus, der die Yang-Baxter-Gleichung

$$(3.5) \quad (X \otimes 1)(1 \otimes X)(X \otimes 1) = (1 \otimes X)(X \otimes 1)(1 \otimes X)$$

erfüllt. Aus der Theorie der Quantengruppen ist bekannt, daß eine geeignete Matrix

$$(3.6) \quad U = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^{-1} - p & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^{-1} \end{pmatrix}$$

ist. Die Matrix $X = -pU$ erfüllt dann neben (3.5) auch noch die Gleichung

$$(3.7) \quad X^2 = (q-1)X + q,$$

worin $q = p^2$ ist.³ Für späteren Gebrauch notieren wir noch den Eigenvektor $(v_0 - \beta p v_1) \otimes (v_0 + \beta v_1)$ von X .

Wir suchen nun nach Automorphismen

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} : V \rightarrow V,$$

so daß mit $Y = F \otimes 1$ die Relation

$$(3.8) \quad XYXY = YXYX$$

erfüllt ist.

(3.9) Lemma. *Sei F kein Vielfaches der Einheitsmatrix und $p - p^{-1}$ kein Nullteiler in K . Unter diesen Voraussetzungen ist die Gleichung (3.8) genau dann erfüllt, wenn $\alpha = 0$ ist.*

BEWEIS. Statt X können wir auch U verwenden. Es ist

$$YU = \begin{pmatrix} \alpha p^{-1} & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(p^{-1} - p) & -\alpha & \gamma p^{-1} \\ \beta p^{-1} & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & \beta(p^{-1} - p) & -\beta & \delta p^{-1} \end{pmatrix}$$

und UY entsteht daraus durch Transposition und Vertauschung von β und γ . Indem man in dem Quadrat dieser Matrizen die Elemente an den Stellen (1,2) und (2,1) anschaut, erkennt man, daß $\alpha\beta = 0 = \alpha\gamma$ sein muß, sofern $p^{-1} - p$ kein Nullteiler ist. Ist β oder γ gleich Null, so kann α nicht Null sein, und folglich ist dann $\beta = \gamma = 0$. In diesem Fall sieht man durch Quadrieren leicht, daß auch $\alpha = \delta$ sein muß. Im Fall $\alpha = 0$ wird die fragliche Gleichung nachgerechnet. \square

(3.10) Korollar. *Wir erhalten eine Darstellung der Zopfgruppe ZB_n auf $V(n)$, wenn wir setzen*

$$(3.11) \quad \begin{aligned} x_0 &= F \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\ x_j &= 1 \otimes \cdots \otimes X \otimes \cdots \otimes 1, \quad j \geq 1, \end{aligned}$$

wobei X in x_j auf den Faktoren j und $j+1$ wirkt und F nach (3.9) die Gleichung (3.6) erfüllt. \square

Die Matrix F erfüllt die Gleichung $F^2 = \delta F + \beta\gamma$. Also erhalten wir:

(3.12) Korollar. *Die Darstellung (3.11) liefert im Fall $\delta = Q - 1$ und $\beta\gamma = Q$ eine Darstellung von $HB_n(q, Q)$ auf $V(n)$. \square*

Wir verwenden jetzt speziell die Matrix

$$(3.13) \quad F = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & p - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } uv = p$$

³Meistens tritt in der Literatur diese Matrix für den Parameter $-p$ auf. Unsere Version wird durch (2.1) erzwungen.

weil sie die Gleichung

$$(3.14) \quad F^2 = (p-1)F + p$$

erfüllt. Wir notieren in diesem Fall noch die Eigenvektoren $uv_0 - v_1$ und $v_0 + vv_1$ zum Eigenwert -1 und p von F . In diesem Fall gilt:

(3.15) Satz. *Sei $u = v = -iA$. Die HB_n -Modulstruktur auf $V(n)$ faktorisiert dann über die kanonische Projektion $t: HB_n \rightarrow TB_n$ und liefert die eingangs beschriebene TB_n -Modulstruktur. Die anderen danach beschriebenen Strukturen erscheinen bei freier Wahl von u, v mit $uv = p$.*

BEWEIS. Der kanonische Morphismus $t: HB_n \rightarrow TB_n$ wird nach [2] im Fall $c = -i(A - A^{-1})$ durch

$$x_j \mapsto pe_j - 1, \quad p^{-1}(x_j + 1) \mapsto e_j, \quad j \geq 1$$

$$x_0 \mapsto -iAe_0 - 1, \quad iA^{-1}(x_0 + 1) \mapsto e_0$$

geliefert. Wir bemerken nun, daß $iA^{-1}(F + 1)$ die Matrix C ist und $p^{-1}(X + 1)$ die Matrix B . \square

Der nächste Satz belegt, warum wir den Modul $V(n)$ als fundamental bezeichnen.

(3.16) Satz. *Sei K ein Körper der Charakteristik Null und A keine Einheitswurzel. Der fundamentale Modul ist die direkte Summe der irreduziblen TB_n -Moduln. Jeder tritt mit der Multiplizität 1 darin auf. Es gibt $n+1$ solcher Moduln $M(j) = M_j$, $0 \leq j \leq n$. Es gilt $\dim M_j = \binom{n}{j}$.*

Zum Beweis des Satzes verwenden wir die folgende Aussage.

(3.17) Satz. *Der Unterraum der Vektoren $x \in M$, auf denen alle $x_j \in HB_n$ durch Multiplikation mit -1 wirken, wird von*

$$\omega = (uv_0 - v_1) \otimes (uv_0 + p^{-1}v_1) \otimes (uv_0 - p^{-2}v_1) \otimes \cdots$$

erzeugt.

BEWEIS. Sei x ein Vektor in diesem Unterraum. Wir zeigen induktiv, daß x bis auf ein skalares Vielfaches die Form

$$x = (uv_0 - v_1) \otimes \cdots \otimes (uv_0 - (-p)^{i-1}v_1) \otimes z_{i+1}$$

hat, wobei z_{i+1} in dem $(n-i)$ -fachen Tensorprodukt $V \otimes \cdots \otimes V$ liegt. Wir setzen x in der Form

$$x = \alpha v_0 \otimes r + \beta v_1 \otimes s \neq 0$$

an. Durch Anwendung von x_0 wird daraus

$$\alpha vv_1 \otimes r + \beta(uv_0 + (p-1)v_1) \otimes s.$$

Das soll gleich $-x$ sein. Wir vergleichen die Koeffizienten von v_0 und v_1 und erhalten die Bedingung $\alpha r + \beta u s = 0$. Durch Einsetzen folgt $x = (uv_0 - v_1) \otimes -\beta s$, wie gewünscht.

Zur Vereinfachung der Schreibweise betrachten wir nur den nächsten Induktionsschritt. Wir setzen an⁴:

$$\begin{aligned} x &= (uv_0 - v_1) \otimes (\alpha v_0 \otimes r + \beta v_1 \otimes s) \\ &= v_{00} \otimes \alpha r + v_{01} \otimes \beta u s + v_{10} \otimes (-\alpha r) + v_{11} \otimes (-\beta s). \end{aligned}$$

Durch Anwendung von x_1 wird daraus

$$-v_{00} \otimes \alpha r + ((p^2 - 1)v_{01} + pv_{10}) \otimes \beta u s + pv_{01} \otimes (-\alpha r) - v_{11} \otimes (-\beta s).$$

Soll das gleich $-x$ sein, so führt Koeffizientenvergleich zu der Bedingung $\alpha r = \beta p u s$. Einsetzen liefert das Gewünschte.

Man rechnet leicht nach, daß ω ein (-1) -Eigenvektor für alle x_j ist. Dazu braucht man die oben genannten Eigenvektoren von X und F . \square

Beweis von Satz (3.16). Induktion nach n . Wir betrachten die Restriktion von TB_n -Moduln auf TB_{n-1} . Nach [2] wissen wir, daß

$$\text{res}M_j(n) = M_{j-1}(n-1) \oplus M_j(n-1)$$

ist ($\text{res}M_0(n) = M_0(n-1)$, $\text{res}M_n(n) = M_{n-1}(n-1)$). Ferner gilt offenbar für die fundamentalen Moduln

$$\text{res}V(n) = 2V(n-1).$$

Wir setzen eine direkte Zerlegung

$$V(n) = \bigoplus_{j=0}^n r_j M_j(n)$$

in irreduzible Moduln an. Nach Induktionsvoraussetzung und den vorstehenden Bemerkungen folgt dann $r_j + r_{j+1} = 2$ für $j = 0, \dots, n-1$. Wir haben in (3.17) gesehen, daß (bei geeigneter Indizierung) $r_0 = 1$ ist. Also sind alle $r_j = 1$. \square

(3.18) Notiz. Der zweite eindimensionale Untermodul von $V(n)$ wird durch den Vektor

$$\tau = (v_0 + v v_1) \otimes (v_0 - p^{-1}v_1) \otimes (v_0 + p^{-2}v_1) \otimes \dots$$

aufgespannt. Er muß nämlich nach [2] ein p -Eigenvektor von x_0 und ein (-1) -Eigenvektor von x_j , $j > 0$ sein. \square

(3.19) Beispiel. Wir betrachten für den Fall $n = 2$ im fundamentalen Modul die Vektoren

$$\begin{aligned} y &= v_{01} + p v_{10} \\ x &= v_{00} + v_{01} + v_{10} + v_{11}. \end{aligned}$$

⁴Wieder mit Abkürzungen $v_{ij} = v_i \otimes v_j$

Der davon aufgespannte Unterraum ist im Fall $u = p$ und $v = 1$ HB_2 -stabil. In der Basis x, y haben x_0 und x_1 die Matrizen

$$x_0 = \begin{pmatrix} p & p \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ p+1 & q \end{pmatrix}.$$

Vergleiche dazu die Spiegelungsdarstellung [1], 67C. Die Determinante des Übergangs von der Standardbasis zu ω, τ, x, y berechnet sich zu $\pm(p+1)^2(p^3+1)$. Die Zerlegung ist also immer dann möglich, wenn dieser Wert eine Einheit ist. \heartsuit

Wir benutzen die Darstellung von TB , um die in [2] eingeführte geometrische Spur der Algebra TB_n als eine algebraische Spur auf dem fundamentalen Modul $M = V(n)$ zu erhalten. Dazu definieren wir als *kategorielle Spur* einer K -linearen Abbildung $l: M \rightarrow M$ den Morphismus

$$K \xrightarrow{k} M \otimes M \xrightarrow{l \otimes 1} M \otimes M \xrightarrow{f} K,$$

oder das Bild der 1 bei dieser Abbildung. Hierbei wird $k: K \rightarrow V \otimes \cdots \otimes V$ in ein $2n$ -faches Tensorprodukt iterativ eingesetzt, nach Art von

$$K \xrightarrow{k} V \otimes V = V \otimes K \otimes V \xrightarrow{1 \otimes k \otimes 1} V \otimes V \otimes V \otimes V,$$

d. h. jeweils ein weiteres k wird in der Mitte eingesetzt. Dual verfährt man mit f . Sei u^n die n -te Tensorpotenz der Abbildung $u: V \rightarrow V$ mit Diagonalmatrix $\text{Dia}(p, p^{-1})$.

(3.20) Satz. *Die kategorielle Spur von l ist gleich der üblichen Spur der linearen Abbildung $l \circ u^n$. Die geometrische Spur von $x \in TB_n$ ist gleich der kategoriellen Spur der Linkstranslation l_x von x auf $V(n)$.*

BEWEIS. Nach linearer Algebra ist $\text{Sp}(f(l \otimes 1)k) = \text{Sp}((l \otimes 1)kf)$. Wir behandeln zunächst den zweidimensionalen Fall. Die Matrix von kf ist, wie wir in (3.3) gesehen haben,

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & p & 1 & \\ & 1 & p^{-1} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix von l sei $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Dann ist die Matrix von $(l \otimes 1)kf$ gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & c & p^{-1}c & 0 \\ 0 & ap & a & 0 \\ 0 & d & p^{-1}d & 0 \\ 0 & bp & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und hat die Spur $ap + dp^{-1}$. Und das ist auch die Spur von lu .

Der höherdimensionale Fall wird auf diesen zurückgeführt. Da die Spur linear in den beteiligten Endomorphismen ist, genügt es, die Gleichheit für ein

geeignetes Erzeugendensystem nachzuweisen. Eine Abbildung $l: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ werde als Linearkombination von Abbildungen der Form $l_1 \otimes l_2$ geschrieben. Dann gilt wegen der Multiplikativität der Spur in Tensorprodukten

$$\begin{aligned} & \text{Sp}((l_1 \otimes l_2 \otimes 1 \otimes 1) \circ kf) \\ &= \text{Sp}((l_1 \otimes 1)kf) \text{Sp}((l_2 \otimes 1)kf) \\ &= \text{Sp}(l_1 \circ u) \text{Sp}(l_2 \circ u) \\ &= \text{Sp}((l_1 \otimes l_2) \circ (u \otimes u)). \end{aligned}$$

Ähnlich folgt die Behauptung im allgemeinen Fall.

Nun zum Beweis der zweiten Behauptung des Satzes. Wir benutzen jetzt, daß die kategorielle Spur eine Isotopieinvariante ist. Sie läßt sich dann, falls $l = l_x$ für $x \in TB_n$ ist, aus der Anzahl der Zyklen berechnen und ist deshalb gleich der geometrischen Spur, weil die geometrische und algebraische Spur für die Standardelemente $\text{id}(V) = l_1, l_{e_j}$ übereinstimmen. Für e_0 zum Beispiel ergibt sich

$$\begin{pmatrix} iA^{-1} & 1 \\ 1 & -iA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iA^{-1}p & p^{-1} \\ p & -iAp^{-1} \end{pmatrix}$$

mit der Spur $iA^{-1}p - iAp^{-1} = -i(A - A^{-1}) = c$. \square

Wir betrachten schließlich den fundamentalen Modul durch Einschränkung der Operation auch noch als $T[n] := TA_{n-1}$ -Modul (im generischen Fall). Die Temperley-Lieb-Algebra $T[n]$ hat im generischen Fall die folgenden irreduziblen Moduln, die wir im Zusammenhang mit der Darstellungstheorie der Quantengruppe $U = U_p(sl_2)$ betrachten. Sei wiederum V der zweidimensionale irreduzible Standardmodul von U . Dann haben wir früher schon gesehen, daß $V(n)$ ein $(U \otimes T[n])$ -Modul ist. Als solcher zerfällt er in die irreduziblen Moduln

$$V(n) = \bigoplus_{k=0}^{[n/2]} W(k),$$

worin $W(k)$ die Form $T_k \otimes V_{n-2k}$ hat. (Das ist ein Spezialfall der quantisierten Schur-Weyl-Dualität [4].) Dabei ist $T_k = T_k(n)$ der irreduzible $T[n]$ -Modul der Dimension $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$ und V_l ein irreduzibler U -Modul der Dimension $l + 1$. Aus dem Bratteli-Diagramm der Temperley-Lieb-Algebren [6] entnimmt man, daß sich die Moduln T_k bei der Restriktion von $T[n]$ auf $T[n-1]$ wie folgt verhalten:

$$(3.21) \quad \text{res}T_k(n) = T_k(n-1) \oplus T_{k-1}(n-1).$$

Darin ist $T_{-1} = 0$ und $T_l = 0$ für $l > [n/2]$.

(3.22) Satz. *Der TB_n -Modul $M_k(n)$ zerfällt als TA_{n-1} -Modul für $k \leq [n/2]$ in die direkte Summe der T_0, T_1, \dots, T_k und M_j wird zu M_{n-j} isomorph.*

BEWEIS. Induktion nach n aus dem Restriktionsverhalten der Moduln M_k und T_k . Wir setzen eine Zerlegung

$$M_j(n) = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{jr} T_r(n)$$

als $T[n]$ -Modul an und restringieren sie auf $T[n-1]$. Wir benutzen dann (3.16), (3.21) und die Induktionsvoraussetzung. Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung. Ebenso folgt die Isomorphie $M_j \cong M_{n-j}$ als $T[n]$ -Modul durch Induktion. \square

Durch die doppelte Zerlegung von $V(n)$ wird etwa der Summand V_n in eindimensionale Unterräume zerlegt. Diese Zerlegung hängt jedoch von der Erweiterung der TA_{n-1} -Struktur zur TB_n -Struktur ab. Wir untersuchen später dieses werkwürdige Phänomen genauer.

(3.23) Bemerkung. Wir haben in [2] zwei zentrale orthogonale Idempotente f_{n-1} und g_{n-1} von TB_n konstruiert, die das Bild von Idempotenten φ_1 und φ_3 aus HB_n sind. Wenden wir φ_1 auf $V(n)$ an, so entsteht der von ω erzeugte Modul, da $x_j \varphi_1 = -\varphi_1$ für alle j gilt. Analog liefert φ_3 den von τ erzeugten Untermodul. \heartsuit

(3.24) Problem. Welcher TB_n -Modul entsteht aus einer vorgegebenen Darstellung von TB ?

4. Darstellungen von HB_n und R -Matrizen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Ergebnisse des letzten Abschnittes auf die R -Matrizen, die aus der fundamentalen Darstellung der Quantengruppe $U_q(sl_{n+1})$ entstehen.

Sei V ein freier K -Modul mit Basis v_0, v_1, \dots, v_n . In $V \otimes V$ benutzen wir die Basis $v_i \otimes v_j = v_{ij}$ mit lexikographischer Ordnung. Wir verwenden den Automorphismus $X(q) = X: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, der durch

$$X(v_{ij}) = \begin{cases} v_{ji} & i > j \\ qv_{ij} & i = j \\ v_{ji} + (q - q^{-1})v_{ij} & i < j \end{cases}$$

gegeben ist ($q \in K^*$). Es handelt sich im wesentlichen um die oben genannte R -Matrix. Ferner brauchen wir einen Automorphismus $h: V \rightarrow V$ der folgenden Form:

$$\begin{aligned} h(v_j) &= \alpha_j v_j + \beta_j v_{n-j}, & j \neq \frac{n}{2} \\ h(v_j) &= \alpha v_j, & j = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten α_j und β_j sollen die folgenden Eigenschaften haben:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= 0, & 0 \leq j < \frac{n}{2} \\ \alpha_j &= w, & \frac{n}{2} < j \leq n \\ \beta_j \beta_{n-j} &= z, & 0 \leq j < \frac{n}{2} \\ a^2 &= aw + z. \end{aligned}$$

Falls n ungerade ist, kommt natürlich der a -Term nicht vor. Wir setzen ferner $Y = h \otimes 1: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$. Mit diesen Daten erfüllen h und Y die quadratische Gleichung $x^2 = wx + z$. Wenn es a nicht gibt, so sind w und z unabhängig wählbar.

(4.1) Satz. *Mit den oben festgelegten Daten ist die Relation $XYXY = YXYX$ erfüllt.*

BEWEIS. Induktion nach $n \geq 1$. Für $n = 1$ handelt es sich um eine schon im Abschnitt 2 verifizierte Relation.

Für $n = 2$ beachten wir, daß X und Y die folgenden Unterräume von $V \otimes V$ invariant lassen. Die Räume werden durch ihre erzeugenden Basen beschrieben.

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle v_{00}, v_{02}, v_{20}, v_{22} \rangle \\ W_2 &= \langle v_{11} \rangle \\ W_3 &= \langle v_{01}, v_{10}, v_{12}, v_{21} \rangle \end{aligned}$$

Auf W_1 liegt die Situation des Falles $n = 1$ vor; dort ist also die fragliche Relation erfüllt. Auf W_2 ist sie trivialerweise erfüllt. Wir betrachten somit nur noch die Matrizen auf W_3 . Sie lauten, mit der Abkürzung $\beta_0 = v$, $\beta_2 = u$ und $\gamma = q - q^{-1}$, wie folgt:

$$X = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ v & 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$

Daraus errechnet sich das Produkt

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \gamma u \\ 0 & 0 & 0 & u \\ v & 0 & a\gamma & w \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Es entsteht daraus YX durch Transponieren und Vertauschen von u und v . Wir berechnen das Quadrat

$$(XY)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a\gamma u & au \\ 0 & 0 & au & 0 \\ va\gamma & va & a^2\gamma^2 + aw & \gamma vu + a\gamma w \\ va & 0 & a^2\gamma & aw \end{pmatrix}.$$

Wird diese Matrix transponiert und werden dann u und v vertauscht, so ergibt sich dasselbe, da die Gleichung $a^2 = aw + vu$ gilt. Diese letzte Gleichung ist zum Beispiel für $w = p - 1$, $vu = p$ und $a = -1$ oder $a = p$ erfüllt.

Bevor der allgemeine Fall behandelt werden kann, muß auch der Fall $n = 3$ noch im einzelnen nachgerechnet werden. In diesem Fall haben wir die bei Y und X invarianten Unterräume $\langle v_{01}, v_{03}, v_{30}, v_{33} \rangle$ und $\langle v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22} \rangle$. Auf diesen

liegt jeweils der Fall $n = 1$ vor. Deshalb haben wir nur noch den von den restlichen Basisvektoren erzeugten Raum zu betrachten. Bezüglich der Basis

$$v_{00}, v_{10}, v_{02}, v_{20}, v_{13}, v_{31}, v_{23}, v_{32}$$

hat X die Kästchendiagonalmatrix

$$X = \begin{pmatrix} H & & & \\ & H & & \\ & & H & \\ & & & H \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und Y die Matrix (mit der Notation $\beta_0 = v_1, \beta_1 = v_2, \beta_2 = u_2, \beta_3 = u_1$)

$$Y = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} & & 0 & 0 & 0 & u_1 & & \\ & & 0 & u_2 & 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & u_1 \\ 0 & v_2 & 0 & w & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & 0 & 0 & u_2 & 0 \\ v_1 & 0 & & & 0 & w & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & v_2 & 0 & w & 0 \\ & & v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{array} \right).$$

Leerstellen bestehen aus Nullen. Aus diesen Daten ergibt sich das folgende Produkt:

$$XY = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} & & 0 & u_2 & 0 & \gamma u_1 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & u_1 & & \\ \hline 0 & v_2 & 0 & w & & & 0 & \gamma u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & u_1 \\ \hline v_1 & 0 & & & 0 & w & \gamma u_2 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & u_2 & 0 \\ \hline & & v_1 & 0 & \gamma v_2 & 0 & w\gamma & w \\ & & 0 & 0 & v_2 & 0 & w & 0 \end{array} \right)$$

und YX entsteht daraus durch Transponieren und Vertauschen von u und v .

Schließlich ergibt sich das Quadrat davon zu

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & u_1 u_2 H \\ 0 & 0 & v_2 u_1 H & u_1 w H \\ 0 & v_1 u_2 H & z \gamma H & u_2 w (\gamma H + I) \\ v_1 v_2 H & v_1 w H & v_2 w (\gamma H + I) & z \gamma H + w^2 (\gamma H + I) \end{array} \right).$$

Diese Matrix geht bei Transposition und Vertauschen von u mit v in sich über. Damit ist auch der Fall $n = 3$ erledigt.

Sei jetzt $n > 3$. Dann ist $V \otimes V$ die Summe von Teilräumen, die bei X und Y stabil sind und auf denen nach Induktionsvoraussetzung die Relation schon besteht. Solche Teilräume sind für $n = 4$ etwa die Räume

$$W(S) = \langle v_{ij} \mid i, j \in S \rangle$$

für $S = \{1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 3, 4\}$ und $\{0, 2, 4\}$; und für $n = 5$ können wir die entsprechenden Räume für $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $\{0, 2, 3, 5\}$ und $\{0, 1, 4, 5\}$ verwenden. Ähnlich verfährt man im allgemeinen Fall. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Wir setzen $w = Q - 1$ und $z = Q$. Die Endomorphismen h und Y erfüllen dann die Gleichung $x^2 = (Q - 1)x + Q$, weil sie aus ein- oder zweidimensionalen Stücken bestehen, wo diese Gleichung gilt. Die Matrix $X = X(q)$ erfüllt bekanntlich die Yang-Baxter-Gleichung

$$(X \otimes 1)(1 \otimes X)(X \otimes 1) = (1 \otimes X)(X \otimes 1)(1 \otimes X)$$

und außerdem die quadratische Gleichung $x^2 = 1 - (q^{-1} - q)x$. Verwenden wir stattdessen die Matrix $Z = pX(-p^{-1})$, so erfüllt sie für $q = p^2$ die Gleichung $Z^2 = (q - 1)Z + q$, die Yang-Baxter-Gleichung sowie die Relation $YZYZ = ZYZY$. Aus Satz (4.1) erhalten wir nun wie vordem Darstellungen der Zopfgruppe und der Hecke-Algebra auf dem k -fachen Tensorprodukt $V(k) = V \otimes \cdots \otimes V$.

(4.2) Satz. *Mit den im Verlaufe dieses Abschnitts festgelegten Daten erhalten wir eine Darstellung von ZB_k auf $V(k)$ durch die Zuordnungen*

$$x_0 \mapsto h \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

$$x_j \mapsto 1 \otimes \cdots \otimes Z \otimes \cdots \otimes 1, \quad j \geq 1.$$

Im letzten Fall wirkt Z auf den Faktoren j und $j + 1$. Im Fall $w = Q - 1$ und $z = Q$ wird dadurch eine Darstellung von $HB_k(q, Q)$ geliefert. Die zugehörige Standarddarstellung von HB_n wird durch die Wahl $\beta_j = -iA$, $w = p - 1$, $a = -1$ gegeben. \square

(4.3) Bemerkung. Der zu $X(q) = X$ inverse Automorphismus ist durch

$$X^{-1}(v_{ij}) = \begin{cases} v_{ji} + (q^{-1} - q)v_{ij} & i > j \\ q^{-1}v_{ij} & i = j \\ v_{ji} & i < j \end{cases}$$

gegeben. Der Automorphismus $x = X_+(p) := p^{n+1}X(p^{-1})$ erfüllt die Skein-Gleichung $p^{n+1}x^{-1} - p^{-(n+1)}x = (p - p^{-1})\text{id}$. \heartsuit

5. Schlingelkategorien

In diesem Abschnitt definieren wir die Kategorien $SA, S^\circ A, SB, S^\circ B$ und beschreiben sie durch Erzeugende und Relationen. Der Buchstabe S deutet auf

Schlingel (englisch tangle) hin, die anderen Symbole haben eine ähnliche Bedeutung wie im ersten Abschnitt. Schlingel verallgemeinern Zöpfe, Knoten und Verschlingungen und erlauben eine algebraisch durchsichtige Konstruktion von Knoteninvarianten. Für die Kategorie $S^\circ A$ der gewöhnlichen orientierten Schlingel verweisen wir auf Turaev [10]. Wir geben hier die Erweiterung auf symmetrische Schlingel an. Da wir in dieser Arbeit hauptsächlich an der Darstellungstheorie interessiert sind, beschränken wir uns darauf, die Kombinatorik der ebenen Bilder zu beschreiben.

Ein (k, l) -Schlingel ist eine reguläre Homotopieklasse einer (stückweise glatten) generischen Immersion von Intervallen und Kreisen in $\mathbb{R} \times [0, 1]$, bei der die immergierten Kreise den Rand $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ nicht berühren und die Randpunkte der Intervalle die Menge $[+k] \times 0 \cup [+l] \times 1$ bilden. Generisch heißt, es gibt höchstens transverse Doppelpunkte. An jeder Kreuzung wird ferner notiert, welches der überkreuzende Strang ist. Gibt es keine Kreuzungen und Kreise, so handelt es sich also um eine (k, l) -Brücke. Gibt es keine Intervalle, so handelt es sich um die reguläre Projektion eines Knotens oder einer Verschlingung; das ist ein $(0, 0)$ -Schlingel.

Die Kategorie SA der Schlingel hat als Objektmenge \mathbb{N}_0 und die Menge der Morphismen von k nach l ist die Menge der (k, l) -Schlingel mit der zusätzlichen Relation, die durch Reidemeister-Züge vom Typ I induziert wird. Läßt man die letzte Relation weg, so entsteht die Kategorie $BanA$ der Bänder. Die Komposition in SA wird wie bei TA durch Untereinandersetzen erklärt. Ebenso wird ein Tensorprodukt durch disjunktes Nebeneinandersetzen definiert.

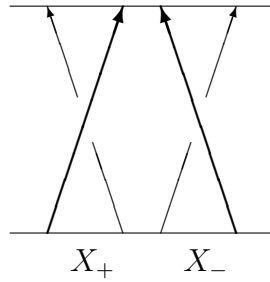
Arbeitet man mit orientierten Intervallen und Kreisen, so entstehen analog die Kategorien $S^\circ A$ und $Ban^\circ A$. Die Objekte sind dieselben wie bei $T^\circ A$.

Ein symmetrischer (k, l) -Schlingel ist eine generische Immersion eines Systems von Intervallen und Kreisen nach $\mathbb{R} \times [0, 1]$, die bezüglich der Spiegelung an $0 \times [0, 1]$ invariant ist; ferner soll die Menge der Randpunkte der Intervalle gleich $[\pm k] \times 0 \cup [\pm l] \times 1$ sein. Auch hier wird an jeder Kreuzung der obere und untere Ast notiert. Zwei spiegelbildliche Kreuzungen haben dabei jedoch dieselbe (!) Überkreuzungsstruktur, wie es sich bei räumlicher Betrachtung und einer π -Drehung um die Achse $(0, 0) \times [0, 1]$ ergeben würde. Es sind auch hier verschiedene Relationen denkbar, die zu Bändern oder regulären Projektionen räumlicher Schlingel gehören. Anstelle einer topologischen Diskussion stellen wir uns hier auf den Standpunkt, daß die Kategorien durch die im folgenden angegebenen Erzeugenden und Relationen definiert werden.⁵ Das liefert die Kategorien SB und $BanB$ sowie die orientierten Versionen $S^\circ B$ und $Ban^\circ B$. Die Objekte sind dieselben wie bei $T^\circ B$ oder TB . Falls keine Kreuzungen und Zyklen vorliegen, ist ein symmetrischer Schlingel eine symmetrische Brücke.

(5.1) Erzeugende von $S^\circ A$.

⁵Allerdings ist die topologische Invarianz für viele Anwendungen wichtig — wir geben ein Beispiel im nächsten Abschnitt — und wird deshalb an anderer Stelle nachgetragen werden müssen.

Die Kategorie $S^\circ A$ hat als Erzeugende I_\pm , k_\pm , und f_\pm aus dem ersten Abschnitt, so wie die beiden Kreuzungen X_+ und X_- .



Zum Prozess der Erzeugung einer Kategorie gehören wieder Komposition und Tensorprodukt.

(5.2) Relationen von $S^\circ A$.

In den folgenden Relationen wird das Tensorprodukt von Morphismen durch Nebeneinanderschreiben der Morphismen notiert.

Wir verwenden die Abkürzungen

$$Y := (I_- I_+ f_+) \circ (I_- X_+ I_-) \circ (k_+ I_+ I_-)$$

$$Z := (f_- I_+ I_-) \circ (I_- X_- I_-) \circ (I_- I_+ k_-).$$

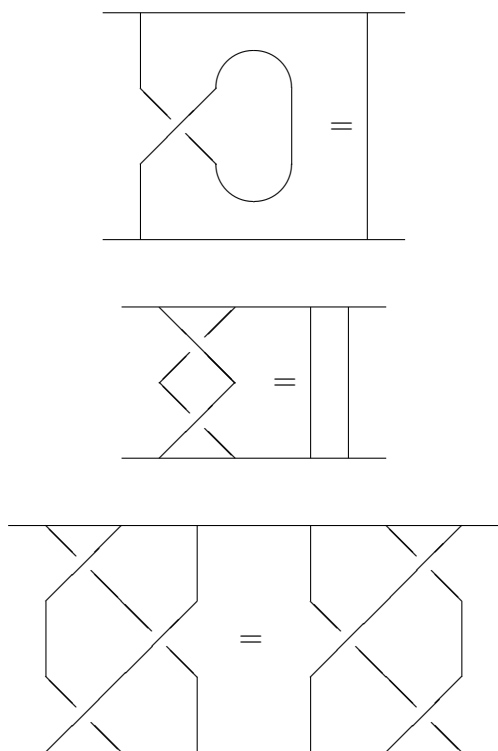
Damit gilt

- (1) $(f_+ I_+) \circ (I_+ k_+) = I_+ = (I_+ f_-) \circ (k_- I_+)$
- (2) $(f_- I_-) \circ (I_- k_-) = I_- = (I_- f_+) \circ (k_+ I_-)$
- (3) $(I_- I_- f_+) \circ (I_- I_- I_+ f_+ I_-) \circ (I_- I_- X_\pm I_- I_-) \circ (I_- k_+ I_+ I_- I_-) \circ (k_+ I_- I_-)$
 $= (f_- I_- I_-) \circ (I_- f_- I_+ I_- I_-) \circ (I_- I_- X_\pm I_- I_-) \circ (I_- I_- I_+ k_- I_-) \circ (I_- I_- k_-)$
- (4) $Y \circ Z = I_- I_+$
- (5) $Z \circ Y = I_+ I_-$
- (6) $X_+ \circ X_- = I_+ I_+ = X_- \circ X_+$
- (7) $(X_+ I_+) \circ (I_+ X_+) \circ (X_+ I_+) = (I_+ X_+) \circ (X_+ I_+) \circ (I_+ X_+)$
- (8) $S_\pm := (I_+ f_+) \circ (X_\pm I_-) \circ (I_+ k_-) = I_+.$

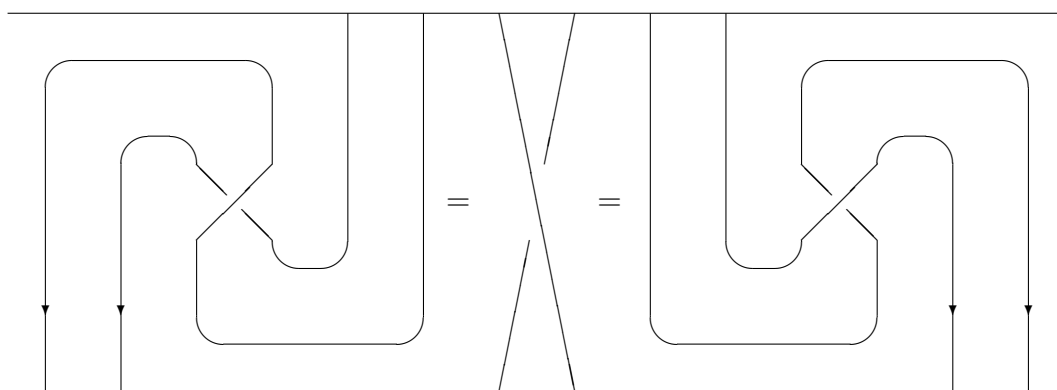
Wir veranschaulichen nun diese Relationen durch Figuren und geben noch einige Erläuterungen. Die Relationen (1) und (2) traten im ersten Abschnitt in (1.1) auf und wurden dort veranschaulicht. Die Relationen (6), (7) und (8) sind die bekannten Reidemeister-Züge der Knotentheorie, und zwar heißt (8) vom Typ I, (6) vom Typ II und (7) vom Typ III. Wir nennen (7) auch die *Dreizopfrelation*.

Es folgt aus (4) und (5), daß Y und Z zueinander inverse Morphismen sind. Ebenso folgt aus (6), daß X_+ und X_- zueinander invers sind. Die Relation (7) ist dann eine Identität zwischen Isomorphismen. Durch Übergang zum Inversen erhalten wir die entsprechende Relation mit X_- . Sie muß also nicht postuliert werden. Man kann zeigen, daß die Relation (3), gebildet mit X_- , aus derjenigen für X_+ und den anderen Relationen folgt. Für die Reidemeister-Bewegung (8) vom Typ I gibt es auch, geometrisch gesprochen, die Schleifen nach der anderen

Seite. Die entsprechende Relation des „Glattziehens“ folgt aus den vorhandenen Relationen. Entsprechendes gilt für die Relation (9). Die Relation (8) wird bei Darstellungen von Band-Kategorien oft bis auf einen skalaren Faktor erfüllt sein (Eigenwertgleichung). Dann kann man im orientierten Fall durch Renormalisierung mit dem Drall die Relation (8) erzwingen. In der ersten Figur ist S_+ verzeichnet. Alle Figuren haben eine Gegenversion, bei der sämtliche Kreuzungen in ihr Gegenteil verwandelt sind. Außerdem muß man die Figuren noch mit Orientierungen versehen. Hier zunächst die Relationen (8), (6) und (7).



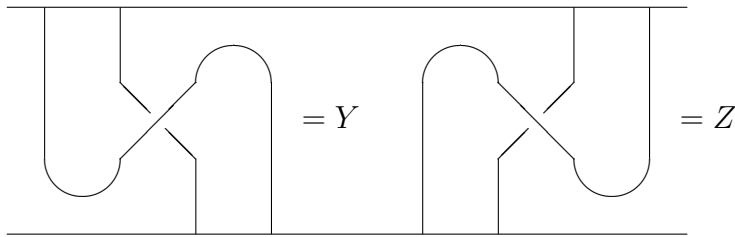
Die Relation (3) wird im Fall von X_+ durch die nächste Figur angedeutet.



In der vorstehenden Figur ist das mittlere Stück im orientierten Fall eine Kreuzung mit nach unten weisender Orientierung. Diese Kreuzung kommt in den Erzeugern von $S^{\circ}A$ nicht vor. Sie dient dann nur der geometrischen Erläuterung und

liefert keine Relation. Im Fall SA wird dagegen eine weitere Relation geliefert; den dadurch gegebenen Sachverhalt nennen wir Selbstdualität der Kreuzungen.

Die Relationen (4) und (5) benutzen schließlich die beiden folgenden Schlingel.



Gelegentlich möchte man die letzte Reidemeister-Relation (8) nicht fordern, sondern nur die schwächere Bedingung

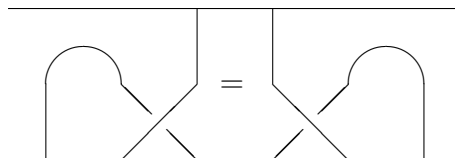
$$(9) \quad S_+S_- = S_-S_+ = I_+.$$

Wird statt (8) nur (9) gefordert, so erhalten wir die Kategorie der orientierten Bandbilder Ban° .

Im Falle unorientierter Schlingel und Bänder haben wir dieselben Erzeuger und Relationen, nur fallen jetzt die durch eine Orientierung unterschiedenen zusammen. Damit erhalten wir die Kategorien SA und $BanA$.

Wir sollten schließlich noch erwähnen, daß I_\pm als Identitäten geführt werden (siehe (1.2) und (1.4)); das bewirkt stillschweigende Relationen.

Bei unorientierten Schlingeln fallen einige zunächst durch Orientierung unterschiedene Kreuzungen zusammen. Es ist deshalb sinnvoll, stärkere Relationen zu betrachten. Zum Beispiel kann man Y und Z zu Kreuzungen „glattziehen“. Die stärksten derartigen Relationen haben die folgende Form



und die sich daraus durch Stürzen und Ändern der Kreuzung ergebenden. (Aufgabe: Glattziehen von Y und Z folgt damit.) Algebraisch sind das die Relationen

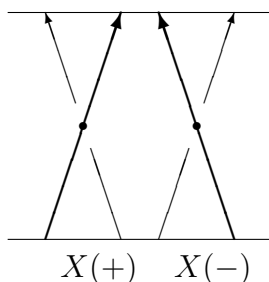
$$(10) \quad (fI) \circ (IX_\pm) = (If) \circ (X_\mp I), \quad (IX_\pm) \circ (kI) = (X_\mp I) \circ (Ik).$$

Eine *strenge unorientierte* Kategorie erfülle definitionsgemäß die Relation (10).

Die Kategorien $S^\circ B$ und SB werden als Modultensorkategorie über $S^\circ A$ und SA betrachtet. Die Modulstruktur wird dadurch definiert, daß ein gewöhnlicher Schlingel durch symmetrische Verdoppelung rechts und links disjunkt neben einen symmetrischen gelegt wird. Angewendet auf den leeren Schlingel liefert das Einbettungen $S^\circ A \subset S^\circ B$ und $SA \subset SB$.

(5.3) Zusätzliche Erzeuger von $S^\circ B$.

Zunächst haben wir κ_\pm und φ_\pm wie für $T^\circ B$. Ferner gibt es die symmetrischen Kreuzungen $X(+)$ und $X(-)$.



In der Figur deutet der dicke Punkt den Überkreuzungspunkt mit der Symmetrieachse an.

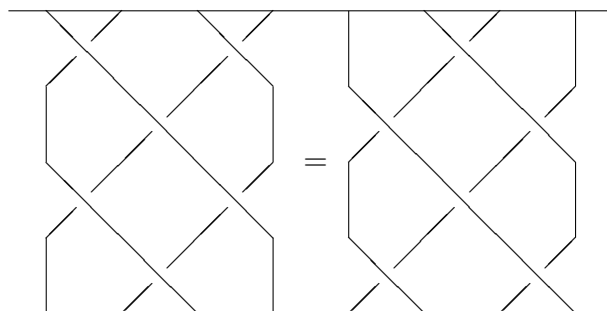
(5.4) Zusätzliche Relation von $S^\circ B$.

(11) $\kappa_\pm = (\varphi_\pm \otimes I) \circ k_\pm, \varphi_\pm = f_\pm \circ (\kappa_\pm \otimes 1I).$

(12) $X(+) \circ X(-) = I_+ = X(-) \circ X(+).$

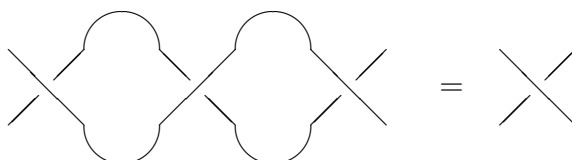
(13) $X_\pm X(\pm) X_\pm X(\pm) = X(\pm) X_\pm X(\pm) X_\pm.$

Die Relationen (11) hatten wir schon in (1.3) aufgeführt. Die Relation (12) ist wieder eine Reidemeister-Relation, symmetrisch vom Typ II. Die Relation (13) nennen wir die *Vierzopfrelation*. Sie wird durch die folgende Figur veranschaulicht.



Geometrisch handelt es sich um einen absteigenden Zopf, der zur symmetrischen Permutation $-2 \mapsto 2, -1 \mapsto 1$ gehört. Wenn wir in dieser Relation die Symmetrie vergessen, so folgt sie natürlich aus den Reidemeister-Relationen vom Typ III. Formal gesehen haben wir eine Einbettung von Zopfgruppen $ZB_2 \rightarrow ZA_3$ durch $y_0 \mapsto x_2$ und $y_1 \mapsto x_1 x_3$, in den kanonischen Erzeugern beschrieben.

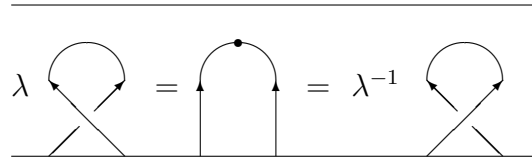
Die nach unten laufende symmetrische Kreuzung wird durch die anderen Daten gebildet. Das erläutert die nächste Figur.



In der Kategorie SB werden dadurch neue Relationen geliefert. Sie werden durch die nachstehenden Gleichungen beschrieben:

$$(14) \quad (f \otimes I) \circ (X(\mp) \otimes X_{\pm}) \circ (k \otimes I) = X(\pm).$$

Nach Ersetzen von (8) durch (9) erhält man Kategorien $\text{Ban}^\circ B$ und $\text{Ban} B$ von symmetrischen Bändern. Man kann nach Reidemeister-Relationen vom Typ I für die symmetrischen Kreuzungen fragen. Die Darstellungstheorie der Kategorien, insbesondere auch der Kauffman-Funktor, macht klar, daß man solche Relationen im allgemeinen nicht streng erwarten kann, sondern höchstens algebraisch als Eigenwertgleichung, was geometrisch einem Drall entspricht. Es wird also höchstens Relationen des folgenden Typs geben:



In Formeln lauten die zugehörigen Relationen:

$$(15) \quad \lambda f(-)X(-) = f(-) = \lambda^{-1} f(-) \circ X(+)$$

$$(16) \quad \mu X(-)k(+) = k(+) = \mu^{-1} X(+)\circ k(+).$$

Man sollte übrigens bedenken, daß bei der geometrischen Betrachtung symmetrischer Knoten, wie sie etwa durch symmetrische Schließung von Zöpfen des Typs B entstehen, die Morphismen φ_{\pm} und κ_{\pm} nicht gebraucht werden. Diese Morphismen stellen also eine formale Erweiterung der Kategorie der symmetrischen geometrischen Schlingel dar. Diese Erweiterung ist allerdings zweckmäßig, wie insbesondere durch den Kauffman-Kalkül der B -Klammer [2] belegt wird.

Es gibt weitere Relationen, die geometrisch naheliegen und die man kontemplieren sollte. Sie behandeln das Ziehen eines symmetrischen Bogens über eine symmetrische Kreuzung. Das liefert die folgenden Relationen:

$$(17) \quad (X(\mp)I) \circ X_{\mp} \circ (\kappa_+ I) = X_{\pm} \circ (\kappa_+ I) \circ X(\mp)$$

$$(18) \quad (\varphi_- I) \circ X_{\mp} \circ (X(\mp)I) = X(\mp) \circ (\varphi_- I) \circ X_{\pm}.$$

6. Darstellungen von Schlingelkategorien

Wir beschreiben zunächst eine Darstellung von $\text{Ban} B$, die durch den Kauffman-Funktor geliefert wird. Der Kaufman-Funktor wurde im wesentlichen in [2] definiert. Es handelt sich um einen Funktor $\Gamma: \text{Ban} B \rightarrow TB$, der auf den Kreuzungen die folgenden Werte annimmt:

$$\Gamma(X_{\mp}) = A^{\pm 1}fk + A^{\mp 1}\text{id},$$

$$\Gamma(X(\mp)) = -A^{\pm 1/2}\varphi\kappa \pm iA^{\mp 1/2}\text{id}.$$

Die in TB liegenden Erzeuger von $\text{Ban} B$ werden bei Γ identisch abgebildet. Wir verwenden hier den Parameter $c = -i(A - A^{-1})$. Wir kombinieren Γ mit der

fundamentalen Darstellung (2.1). Das liefert die folgenden Werte:

$$X_- = \begin{pmatrix} A^{-1} & & & \\ & A^{-1} - A^3 & A & \\ & & A & 0 \\ & & & A^{-1} \end{pmatrix}, \quad X_+ = \begin{pmatrix} A & & & \\ & 0 & A^{-1} & \\ & A^{-1} & A - A^{-3} & \\ & & & A \end{pmatrix}$$

$$X(-) = \begin{pmatrix} 0 & -A^{1/2} \\ -A^{1/2} & iA^{3/2} + iA^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad X(+) = \begin{pmatrix} -iA^{-3/2} - iA^{1/2} & -A^{-1/2} \\ -A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gelten die Skein-Relationen

$$(6.1) \quad \begin{aligned} A^{-1}X_- - AX_+ &= (p - p^{-1})\text{id} \\ A^{-1/2}X(-) - A^{1/2}X(+) &= i(A + A^{-1})\text{id}. \end{aligned}$$

Die Relationen (13) und (14) wurden für Γ in [2] verifiziert. Eine leichte Verifikation aus den Definitionen liefert:

(6.2) Notiz. *Der Kauffman-Funktor Γ ist mit den Relationen (10), (17) und (18) verträglich. In Bezug auf die Reidemeister-Züge vom Typ I gelten die Eigenwertgleichungen*

$$\varphi X(\mp) = \pm iA^{\pm 3/2}\varphi, \quad X(\mp)\kappa = \pm iA^{\pm 3/2}\kappa$$

sowie

$$(1\varphi) \circ X_{\mp} \circ (1\kappa) = \mp A^{\mp 3}\text{id}.$$

Letzteres ist die bekannte Drallrelation für die Kauffman-Klammer. \square

Wir wollen im weiteren analoge höherdimensionale Darstellungen von $\text{Ban}B$ konstruieren, die die Darstellungen der Hecke-Algebra aus dem vierten Abschnitt verallgemeinern. Wir setzen $\gamma^2 = iA$ und somit $\gamma^4 = p = -A^2$. Sei V ein freier K -Modul mit Basis v_0, \dots, v_n . Wir beginnen mit den Daten (2.4).

$$(6.3) \quad \begin{aligned} k: K &\rightarrow VV, & 1 &\mapsto \sum_{j=0}^n \gamma^{2n-4j} v_j v_{n-j} \\ f: VV &\rightarrow K, & v_r v_s &\mapsto \delta_{r,n-s} \gamma^{2n-4r} \\ \kappa: K &\rightarrow V, & 1 &\mapsto \sum_{j=0}^n \gamma^{2j-n} v_j \\ \varphi: V &\rightarrow K, & v_j &\mapsto \gamma^{2j-n}. \end{aligned}$$

Damit sind jedenfalls die Relationen (1.1) und (1.3), also (1), (2) und (11) erfüllt. Seien $h = h(A): V \rightarrow V$ und $X(p): VV \rightarrow VV$ die im vierten Abschnitt definierten Morphismen. Damit setzen wir

$$(6.4) \quad X_- = AX(-p^{-1}), \quad X(-) = -iA^{-1/2}h(-A)$$

und definieren X_+ und $X(+)$ als die entsprechenden Inversen. Dann gelten weiterhin die Skein-Relationen (6.1). Mit den Ergebnissen des vierten Abschnittes sehen wir, daß die Relationen (6), (7), (12) und (13) erfüllt sind. Die Relationen

(3) und (14) beruhen auf etwas komplizierteren Rechnungen und seien deshalb als Lemma formuliert. Das erste Lemma ist die Relation (3) im unorientierten Fall.

(6.5) Lemma. *Die Morphismen $X(p)$ und $X(p)^{-1}$ sind (im Sinne der Theorie der Tensor kategorien) selbstdual, d. h. es gelten die Identitäten*

$$X(p) = (f11) \circ (1X(p)1) \circ (11k) = (11f) \circ (1X(p)1) \circ (k11)$$

und ebenso, wenn man mit $X(p)^{-1}$ arbeitet.

BEWEIS. Durch Einsetzen der Definitionen. Im nächsten Lemma führen wir eine derartige Rechnung vor. \square

(6.6) Lemma. *Die Abbildung*

$$V \xrightarrow{k1} VVV \xrightarrow{hX(p^{-1})^{-1}} VVV \xrightarrow{f1} V$$

wird durch eine Matrix gegeben, die aus der Matrix von h durch folgenden Prozess entsteht: Spiegelung an der Nebendiagonalen und Multiplikation der Hauptdiagonalelemente mit -1 .

BEWEIS. Wir setzen zunächst die Definitionen ein, wobei wir $X(-)(v_k) = \alpha_k v_k + \beta_k v_{n-k}$ und $X_+(v_{ij}) = \sigma_{ij} v_{ji} + \tau_{ij} v_{ij}$ ansetzen. Einige dieser Koeffizienten sind natürlich Null. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & (f1)(X(-)X_+)(k1)(v_j) \\ = & (f1)(X(-)X_+)\left(\sum_k \gamma^{2n-4k} v_k v_{n-k} v_j\right) \\ = & (f1)\left(\sum_k \gamma^{2n-4k} (\alpha_k v_k + \beta_k v_{n-k})(\sigma_{n-k,j} v_j v_{n-k} + \tau_{n-k,j} v_{n-k} v_j)\right) \\ = & \gamma^{2n-4j} \beta_j \gamma^{2n-4(n-j)} v_{n-j} + \sum_{n-j > k} \gamma^{2n-4k} \alpha_k \gamma^{2n-4k} (-p + p^{-1}) v_j \\ & + \gamma^{2n-4(n-j)} \alpha_{n-j} (-p) \gamma^{2n-4(n-j)} v_j. \end{aligned}$$

Man erkennt, daß der Koeffizient von v_{n-j} gleich β_j ist. Der Koeffizient von v_j ist das folgende Vielfache von $-\alpha = -\alpha_k$

$$(p - p^{-1}) \left(\sum_{k=m+1}^{2m+1-j-2} p^{2m+1-2k} \right) + p^{-(2m+1)+2j+1},$$

und dieser Wert ist gleich 1. Analog im Fall $n = 2m$. \square

Aus Lemma (6.5) folgt durch Einsetzen der Definitionen unmittelbar:

$$(6.7) \quad (f1) \circ (X(-)X_+) \circ (1k) = X(+),$$

also die Relation (14). Wir wissen schließlich schon, daß $X(p)$ die Dreizopfgleichung erfüllt und $h \otimes 1$ und $X(p)$ die Vierzopfgleichung (5.4.13). Mit den vorstehenden Daten erhält man die folgende Drallrelation:

(6.8) Notiz. $f \circ X(-) \circ k = (-1)^n i A^{-(2n+1)/2} [n+1](A)$.

BEWEIS. Durch Einsetzen der Definitionen erhält man im Fall $n = 2m + 1$

$$f \circ X(-) \circ k = \sum_{j=m+1}^{2m+1} i(A^{3/2} + A^{-1/2}) p^{2m+1-2j}.$$

Dieses rechnet man in den angegebenen Wert um. Im Fall $n = 2m$ erhält man den Wert

$$iA^{-1/2} + \sum_{j=m+1}^{2m} i(A^{3/2} + A^{-1/2}) p^{2m-2j}.$$

Wir benutzen die Darstellung von HB_n aus §4 um eine Spur zu definieren. Sei $u: V \rightarrow V$ der durch die Diagonalmatrix $\text{Dia}(p^n, p^{n-2}, \dots, p^{-n+2}, p^{-n})$ gegebene Automorphismus. Einer linearen Abbildung $l: V(k) \rightarrow V(k)$ ordnen wir die Quantenspur $\text{Tr}(l) = \text{Sp}(l \circ u^{\otimes k})$ zu. Mit Hilfe der Hecke-Algebra-Darstellung aus dem vierten Abschnitt setzen wir $\text{Tr}: HB_k(q, Q) \rightarrow K$, wobei $\text{Tr}(x) = \text{Tr}(l_x)$ mit der Linkstranslation l_x von $x \in HB_k$ auf dem Modul $V(n)$. Wir zeigen jetzt, daß diese Abbildung die fundamentale Eigenschaft einer Spur hat. Für diese Spur gilt mit gleichem Beweis das Analogon von (3.20).

(6.9) Satz. *Für je zwei Elemente $x, y \in HB_n(q, Q)$ gilt $\text{Tr}(xy) = \text{Tr}(yx)$.*

BEWEIS. Wir kürzen $U = u^{\otimes k}$ ab und schreiben x für l_x . Ist $x \in HA_{n-1}$, so sind x und U vertauschbar. Es gilt also die Aussage des Satzes für Elemente $x \in HA_{n-1}$ und $y \in HB_n$. Ein Basiselement von HB_n , das nicht in HA_{n-1} liegt, läßt sich in der Form ax_0b mit $a, b \in HA_{n-1}$ schreiben. Deshalb genügt es offenbar, die Gleichheit der Spuren von zx_0U und x_0zU für $z \in HB_n$ zu zeigen. Wir benutzen nun, daß zx_0 und x_0z B -Schlingel sind und die fragliche Spur der Wert der vorstehenden Darstellung dieser Kategorie auf dem symmetrischen Alexander-Abschluß der betreffenden Schlingel. Dann folgt die Aussage unmittelbar aus der topologischen Invarianz. \square

Die vorstehenden Spuren Tr hängen von der gewählten Darstellung ab. In unserem Fall erhalten wir für jedes $n \geq 2$ eine solche Spur. Diese Spuren lassen sich, ähnlich wie im Fall HA_n , zu einer formalen Spur mit zwei Parametern kombinieren. Dazu schaut man sich an, wie sich die Hecke-Algebren induktiv aufbauen lassen.

(6.10) Lemma. *Die Abbildung*

$$HB_n \oplus HB_n \oplus HB_n \otimes_{HB_{n-1}} HB_n \rightarrow HB_{n+1}, \quad (a, b, c \otimes d) \mapsto a + bt_n + cx_nd$$

mit dem Element $t_n = x_n \dots x_1 x_0 x_1^{-1} \dots x_n^{-1}$ ist ein Isomorphismus. \square

Es ist hilfreich und ratsam, sich das Element t_n zu veranschaulichen. Die oben konstruierte Spur hat die Eigenschaften

$$\text{Tr}(ax_n) = \alpha \text{Tr}(a) \quad a \in HB_n$$

$$\mathrm{Tr}(at_n) = \beta \mathrm{Tr}(a) \quad a \in HB_n$$

mit den Werten $\alpha = \mathrm{Tr}(x_1)$ und $\beta = \mathrm{Tr}(x_0)$.

Diese Ergebnisse führen schließlich zu der folgenden formalen Spur.

(6.11) Satz. *Wir setzen $HB = \bigcup_n HB_n$. Zu gegebenen Parametern $s, t \in K$ gibt es genau eine K -lineare Abbildung*

$$\mathrm{TR}: HB \rightarrow K$$

mit den folgenden Eigenschaften: $\mathrm{TR}(1) = 1$, $\mathrm{TR}(xy) = \mathrm{TR}(yx)$, $\mathrm{TR}(ax_n) = s\mathrm{TR}(x_n)$, $\mathrm{TR}(at_n) = t\mathrm{TR}(a)$ mit $a \in HB_n$.

BEWEIS. Es gibt höchstens eine, weil man durch die angegebenen Regeln TR ausrechnen kann. Eine solche Ausrechnung ist für die oben genannten Parameterwerte eindeutig bestimmt, also überhaupt eindeutig. \square

7. Literatur

1. Curtis, Ch. W., and I. Reiner: Methods of representation theory. Vol II. New York, J. Wiley & Sons 1987.
2. tom Dieck, T: Symmetrische Brücken und Knotentheorie zu den Dynkin-Diagrammen vom Typ B . J. reine angew. Math. 71 – 88 (1994).
3. tom Dieck, T.: Knotentheorien und Wurzelsysteme. Teil I. Mathematica Gottingensis 21 (1993).
4. tom Dieck, T.: Quantengruppen. Manuskript einer Vorlesung. Göttingen, Mathematisches Institut 1993/94.
5. Dipper, R., and G. James: Representations of Hecke algebras of type B_n . J. of Algebra 146, 454 – 481 (1992).
6. Goodman, F. M., de la Harpe, P., and V. F. R. Jones: Coxeter graphs and towers of algebras. New York – Berlin, Springer 1989.
7. Kauffman, L. H.: State models and the Jones polynomial. Topology 26, 395 – 407 (1987).
8. Lambropoulou, Sofia S. F.: A study of braids in 3-manifolds. Thesis, Warwick 1993.
9. Reshetikhin, N., and V. G. Turaev: Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. Commun. Math. Phys. 127, 1 – 26 (1990).
10. Turaev, V. G.: Operator invariants of tangles and R -matrices. USSR Izvestia 35, 411 – 444 (1990).

Tammo tom Dieck
Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3/5
D – 37073 Göttingen
tammo@uni-math.gwdg.de