

Symmetrische Brücken und Knotentheorie zu den Dynkin-Diagrammen vom Typ B

Tammo tom Dieck

Zusammenfassung

Classical knot theory belongs to the series A_n of Dynkin-diagrams. There exist analogous theories belonging to the other series and to more general series of Coxeter-Dynkin-diagrams. In this first note we present (as an introduction to area) some basic results for the series B_n . This covers the following topics: Temperley-Lieb-algebras, Hecke-algebras, Kauffman-functor and state sums, braid groups, Markov-traces, writhe, Jones-polynomials, skein-relations and Poincaré-polynomials of Weyl-groups.

Klassische Knotentheorie gehört zur Serie der Dykin-Diagramme A_n . Es gibt analoge Theorien zu den anderen Serien und zu allgemeineren Coxeter-Dynkin-Diagrammen. In dieser Arbeit werden zur Einführung in diesen Gedankenkreis einige erste grundlegende Resultate zur Serie B_n angegeben. Die behandelten Themen sind: Temperley-Lieb-Algebren, Hecke-Algebren, Kauffman-Funktor, Brieskornsche Zopfgruppen, Markov-Spuren, Drall, Jones-Polynome, Skein-Relationen und Poincaré-Polynome von Weyl-Gruppen. Die allgemeineren Überlegungen, die auch die anderen Serien umfassen, bleiben späteren Mitteilungen vorbehalten.

1. Die Kategorie der symmetrischen Brücken

Die Temperley-Lieb-Algebra [9] hat eine geometrisch-graphische Definition [8], die ihrer Verwendung in der niederdimensionalen Geometrie angemessen ist. Wir untersuchen in dieser Note eine analoge graphische Situation mit zusätzlicher Symmetrie und beschreiben die zugehörige Algebra.

Seien k und l natürliche Zahlen. Wir setzen

$$[\pm k] = \{-k, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, k\}, \quad [+k] = \{1, \dots, k\}.$$

Für $k = 0$ ist darunter das leere Symbol zu verstehen. Eine *symmetrische* (k, l) -Brücke S ist ein System von $k + l$ glatten Bögen (= eingebetteten Intervallen) im Streifen $\mathbb{R} \times [0, 1]$ mit Endpunkten in $[\pm k] \times 0$, genannt „unten“, und in $[\pm l] \times 1$, genannt „oben“, die den Rand $\mathbb{R} \times \partial[0, 1]$ transvers treffen, die sich nicht kreuzen und die folgende Äquivarianzeigenschaft haben: Verbindet S einen Wert x mit einem Wert y (oben oder unten), so auch $-x$ mit $-y$. Brücken dieser Art werden bis auf Isotopie betrachtet; deshalb ist eine Brücke vollständig

dadurch bestimmt, welche Paare von Elementen aus $P(k, l) := [\pm k] \times 0 \cup [\pm l] \times 1$ sie verbindet. Demnach ist eine symmetrische Brücke eine freie Involution von $P(k, l)$ mit den Zusatzbedingungen, die sich durch Äquivarianz und Nichtkreuzen der Bögen ergeben. Geometrisch stellen wir uns eine symmetrische Brücke als ein in Bezug auf die Achse $0 \times [0, 1]$ spiegelsymmetrisches System von Bögen vor ($\mathbb{Z}/2$ -Äquivarianz). Ein Bogen, der zwei obere (bzw. zwei untere) Punkte verbindet, heiße *horizontal*, andernfalls *vertikal*.

Aus den symmetrischen Brücken bilden wir eine Kategorie TB. Dazu sei K ein kommutativer Ring und $c, d \in K$. Die Objekte sind $[\pm n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$, und die Morphismen $[\pm m] \rightarrow [\pm n]$ sind die Elemente des freien K -Moduls der symmetrischen (m, n) -Brücken. Die Komposition ist K -bilinear, deshalb erklären wir sie nur für zwei Basiselemente. Sei S eine (k, l) -Brücke und T eine (l, m) -Brücke. Wir setzen T über S und stauchen das Resultat auf Einheitslänge zurück. Das Ergebnis ist im allgemeinen keine Brücke mehr, sondern enthält etwa $k(T, S)$ $\mathbb{Z}/2$ -fixe Bahnen und $l(T, S)$ $\mathbb{Z}/2$ -freie Bahnen von Zyklen. Sei $T \wedge S$ die symmetrische Brücke, die nach Beseitigung der Zyklen verbleibt. Wir erklären die Komposition der Morphismen S und T durch

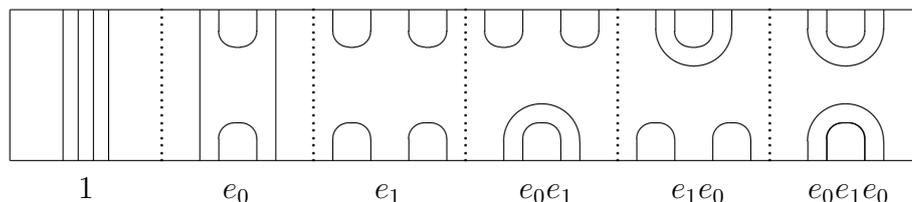
$$(1.1) \quad T \circ S = c^{k(T,S)} d^{l(T,S)} T \wedge S.$$

Sei TB_n die Endomorphismenalgebra von $[\pm n]$ in dieser Kategorie.

Die Temperley-Lieb-Kategorie TA entsteht analog, wenn man Brücken von $[+k] \times 0$ nach $[+l] \times 1$ ohne Symmetriebedingung verwendet. Die Komposition wird wie in (1.1) durch $T \circ S = d^{k(T,S)} T \wedge S$ definiert, wobei jetzt $k(T, S)$ die Anzahl der entstandenen Zyklen bezeichnet. Die Temperley-Lieb-Algebra TA_{n-1} ist die Endomorphismenalgebra von $[+n]$.

Durch Symmetrisierung von Brücken (spiegelbildliche Verdoppelung) erhalten wir eine Inklusion von K -Algebren $TA_{n-1} \subset TB_n$. Allgemeiner könnte man TB als eine strikte Tensormodulkategorie über der strikten Tensorategorie TA ansehen. Wir gehen an dieser Stelle nicht weiter auf diese Struktur ein. Die Verwendung der Buchstaben A und B in diesem Kontext soll übrigens vage an die Coxeter-Dynkin-Graphen vom Typ A und B erinnern. Diese Bemerkung wird später in dieser Arbeit mit mathematischem Gehalt versehen.

Als Beispiel veranschaulichen wir alle symmetrischen $(2, 2)$ -Brücken in der nächsten Figur.



Die darunterstehenden Symbole werden im Abschnitt 4 erklärt.

2. Der Rang der Algebra

Wir bestimmen zunächst den Rang der Algebra TB_n . Dazu sei $A(2k) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$, was übrigens der Rang von TA_{k-1} ist. Wir definieren induktiv eine Folge $B(n)$ durch $B(0) = 1$ und

$$(2.1) \quad B(n) = B(n-1) + B(n-2)A(0) + B(n-4)A(2) + \dots;$$

in der Summe (2.1) ist für $n = 2k$ der letzte Term $B(0)A(2k-2)$ und für $n = 2k+1$ der letzte Term $B(1)A(2k-2)$. Um den Wert von $B(n)$ zu bestimmen, verwenden wir das nächste Lemma.

(2.2) Lemma.

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-2-2j}{n-1-j} A(2j) - \frac{1}{2} \binom{2n}{n} = 0, \quad n \geq 1.$$

BEWEIS. Wir gehen von der formalen Reihenentwicklung

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}) = \sum_{n=0}^{\infty} A(2n)x^{n+1}$$

aus. Wir setzen

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k.$$

Dann ist

$$g(x) = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

und folglich

$$(f(x) - \frac{1}{2})g(x) = -\frac{1}{2}.$$

Wir multiplizieren aus und stellen fest, daß der Koeffizient von x^n gerade die im Lemma vorkommende Gestalt hat. \square

(2.3) **Satz.** Die soeben definierte Folge nimmt die nachstehenden Werte an

$$B(2n) = \binom{2n}{n}, \quad B(2n-1) = \frac{1}{2}B(2n).$$

BEWEIS. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach n . Die Aussage sei für $B(i)$, $i \leq 2n-1$ richtig. Dann haben wir die beiden Rekursionsgleichungen

$$B(2n) = B(2n-1) + B(2n-2)A(0) + \dots + B(0)A(2n-2)$$

$$2B(2n-1) = 2B(2n-2) + 2B(2n-3)A(0) + \dots + 2B(1)A(2n-4).$$

In der zweiten setzen wir für die B mit ungerader Nummer die Induktionsvoraussetzung ein und subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten. Es entsteht

$$B(2n) - 2B(2n-1) = B(2n-1) - 2B(2n-2) + A(2n-2).$$

Setzen wir rechts alle bekannten Werte ein, so ergibt sich Null.

Die Induktionsvoraussetzung gelte für alle $B(i)$, $i \leq 2n$. Dann ist

$$\begin{aligned} B(2n+1) &= B(2n) + B(2n-1)A(0) + \dots + B(1)A(2n-2) \\ &= B(2n) + \frac{1}{2}(B(2n)A(0) + \dots + B(2)A(2n-2)). \end{aligned}$$

Die halbe eingeklammerte Summe ist nach dem Lemma (2.2) gleich

$$\frac{1}{4} \binom{2n+2}{n+1} - \frac{1}{2}A(2n).$$

Wir setzen alle bekannten Werte ein und errechnen das gewünschte Resultat. \square

Wir notieren noch für spätere Zwecke die Identität

$$(2.4) \quad \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2,$$

die aus der binomischen Formel durch Ausmultiplizieren von $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ und Ansehen des Koeffizienten von x^n folgt.

(2.5) Satz. *Die Algebra TB_n hat den Rang $B(2n)$.*

BEWEIS. Sei $B(m, n)$ die Anzahl der symmetrischen (m, n) -Brücken. Dann gilt $B(m, n) = B(m+n, 0) =: B(m+n)$. Das sieht man am besten geometrisch ein, indem man in einer symmetrischen Brücke die unteren Endpunkte mit positivem Wert rechts nach oben klappt und die anderen links nach oben, um die Symmetrie zu wahren. Also bleibt für *diese* Zahlen $B(n)$ die Rekursionsformel (2.1) zu zeigen. Sie entsteht durch Aussonderung des ersten, bei $-n$ beginnenden Brückenbogens. Dieser ist entweder selbst schon symmetrisch; das liefert den Beitrag $B(n-1)$ in der Rekursionsformel. Oder er muß symmetrisiert werden; und dann zählt man die inneren und äußeren Möglichkeiten. \square

3. Die Spur

Die Algebra TB_n hat eine K -lineare Spur

$$Sp_n: TB_n \rightarrow K,$$

die auf einer Brücke S den Wert $Sp_n(S) = c^k d^l$ annimmt, wenn nach Schließung der Brücke k $\mathbb{Z}/2$ -fixe und l $\mathbb{Z}/2$ -freie Bahnen von Zyklen entstehen. Schließen bedeutet, verbinden von k oben jeweils mit k unten. Wir haben eine kanonische Inklusion $i: TB_{n-1} \subset TB_n$, die dadurch definiert ist, daß einer symmetrischen $(n-1, n-1)$ -Brücke noch die vertikalen Stränge von $\pm n$ nach $\pm n$ hinzugefügt werden. Die Abbildung i ist mit den Spuren nicht verträglich, vielmehr gilt

$$(3.1) \quad Sp_n(i(x)) = dSp_{n-1}(x).$$

Wir erhalten eine mit i verträgliche Spur

$$Sp: TB_n \rightarrow K,$$

indem wir für $x \in TB_n$ die normierte Spur $Sp(x) = d^{-n}Sp_n(x)$ verwenden.

Die wesentliche Eigenschaft der Spur ist natürlich

$$(3.2) \quad Sp_n(xy) = Sp_n(yx),$$

die für Brücken x und y unmittelbar aus den Definitionen folgt und sich dann bilinear fortsetzt.

Die Inklusion $TA_{n-1} \subset TB_n$ ist mit den Spuren Sp_n verträglich, wenn wir, wie üblich, einer Brücke S in TA_{n-1} die Spur d^k zuordnen, wenn S nach Schließung k Zyklen liefert.

Als weitere Eigenschaft der Spur merken wir an dieser Stelle schon die Formel

$$(3.3) \quad Sp_n(e_{n-1}y) = d^{-1}Sp_n(y) \quad \text{für } y \in TB_{n-1}$$

an, obgleich das Element e_{n-1} erst im nächsten Abschnitt definiert wird.

4. Erzeugende und Relationen

Die Algebra TB_n hat eine Beschreibung durch Erzeugende und Relationen. Dazu brauchen wir die *elementaren Brücken* e_0, \dots, e_{n-1} . Wenn nichts anderes gesagt wird, sind im folgenden alle Brücken als symmetrisch angenommen. Dabei ist e_0 die Brücke, die -1 mit 1 horizontal oben und unten verbindet und sonst nur vertikale Stränge hat; und e_j ist für $j \geq 1$ die Brücke mit vier horizontalen Bögen, von denen zwei j mit $j+1$ verbinden und die als symmetrisiertes e_j aus TA_{n-1} angesehen wird. Diese Brücken erfüllen die folgenden Relationen, wie sich unmittelbar aus der Definition des Produktes ergibt:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} e_0^2 &= ce_0 \\ e_i^2 &= de_i & i > 0 \\ e_i e_j &= e_j e_i & |i-j| \geq 2 \\ e_i e_j e_i &= e_i & |i-j| = 1, i, j \geq 1 \\ e_1 e_0 e_1 &= ce_1. \end{aligned}$$

Die Unteralgebra TA_{n-1} enthält die Elemente e_1, \dots, e_{n-1} . Wir arbeiten zunächst mit beliebigen Parametern c und d . Später unterwerfen wir sie geeigneten Einschränkungen.

Wir wollen die Algebra TB_n durch Erzeugende und Relationen beschreiben und Brücken aus elementaren Brücken aufbauen. Dazu bringen wir Worte in den elementaren Brücken vermöge der Relationen (4.1) in eine Normalform. Die sechs Brücken aus TB_2 und ihre Normalform hatten wir am Ende von Abschnitt 1 angegeben. Die Komposition ist dabei von oben nach unten zu lesen, weil das unserer Leserichtung besser entspricht.

(4.2) Satz. *Jede Brücke ist ein Produkt elementarer Brücken. Produkte der folgenden Form liefern sämtliche Brücken:*

$$e(i_1, j_1) \cdot \dots \cdot e(i_p, j_p),$$

worin

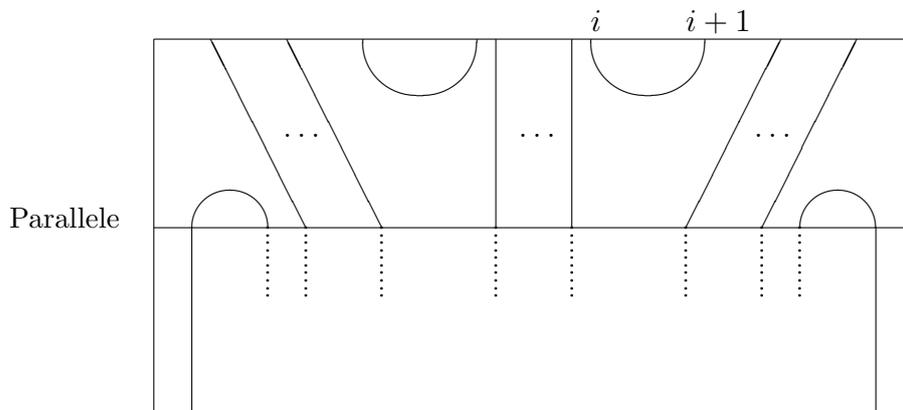
$$\begin{aligned} e(i, j) &= e_i e_{i-1} \dots e_j, & i &\geq j \\ 0 &\leq i_1 < \dots < i_p \leq n-1, \\ 0 &= j_1 = \dots = j_t < j_{t+1} < \dots < j_p \leq n-1 \\ j_s &\leq i_s, & 0 &\leq p \leq n-1. \end{aligned}$$

Die genannten Produkte, betrachtet als formale Worte in den Symbolen e_j , heißen Normalformen.

BEWEIS. Durch Induktion nach n . Eine Brücke, die nur vertikale Stränge hat, ist die Identität. Hat eine Brücke überhaupt horizontale Stränge, dann sowohl obere als auch untere. Sei S eine Brücke. Wir betrachten ihre horizontalen Stränge, die obere Punkte verbinden. Darunter gibt es dann solche, die einen Punkt mit einem Nachbarn verbinden (die innersten Bögen). Sei entweder $i > 0$ maximal gewählt, so daß i und $i+1$ verbunden werden; oder sei die Verbindung von -1 und 1 die einzige innerste Verbindung ($i = 0$). In dieser Situation behaupten wir:

Die Brücke hat die Form $w e_{n-1} \dots e_i$ mit $w \in TB_{n-1}$.

BEWEIS. Wir teilen die innerste Verbindung oben durch eine Parallele zum oberen Rand ab und führen die von $-n$ und n unten ausgehenden Stränge einmal über diese Abtrennung hinüber, so daß sie eine Schlaufe abschneidet (siehe die nächste Figur). Der obere Parallelstreifen ist $e_{n-1} \dots e_i$, wenn die Komposition von oben nach unten gelesen wird. Dieses Verfahren ist für $i > 0$ geeignet. Im Fall $i = 0$ sind alle anderen horizontalen oberen Stränge für sich schon symmetrisch, und die Brücke hat dann eine Form, bei der die Stellen $j+1$ bis n vertikal verbunden werden.



Angenommen, $j = 1$. Dann gibt es unten nur eine vertikale Verbindung, und die muß dann notwendig von -1 nach 1 laufen; die gesamte Brücke ist dann e_0 . Im

Fall $j \geq 2$ können wir wie oben zerlegen. Der obere Steifen in ist in diesem Falle gleich $e_{n-1} \dots e_0$.

Die vorstehenden Überlegungen zeigen durch Induktion nach n jedenfalls schon, daß jede Brücke das Produkt elementarer Brücken ist. Wir behandeln nun $w \in TB_{n-1}$ nach derselben Methode. Angenommen, w hört rechts mit e_j , $j \geq i$, auf. Dann vertauschen wir nach den Relationen (4.1), bis wir ein Wort der Gestalt

$$\dots e_{n-1} \dots e_j e_{j+1} e_j \dots e_i$$

erreichen. Falls darin $j > 0$ ist, erhalten wir mittels (4.1) eine Darstellung der Form

$$u e_{n-1} \dots e_{j+1}, \quad u \in TB_{n-1}.$$

Dann ist aber i nicht der größte Index mit einer inneren Verbindung. Also gibt es eine Darstellung der Brücke als Normalformenwort. \square

(4.3) Satz. *Jedes formale Wort in den Symbolen e_j läßt sich auf Grund der Relationen (4.1) in die Form $c^k d^l x$ bringen, worin $k, l \in \mathbb{N}_0$ ist und x ein Normalformenwort gemäß (4.2).*

BEWEIS. Induktion nach n . Wir betrachten deshalb ein Wort, in dem e_{n-1} vorkommt. Auf Grund der Relationen können wir erreichen, daß e_{n-1} genau einmal vorkommt (siehe für solche Rechnungen [3], p. 87).

Durch Vertauschungen, soweit möglich, erhalten wir dann eine Darstellung der Form

$$d^r w e_{n-1} \dots e_i,$$

wobei w ein Wort in e_{n-2}, \dots, e_0 ist. Wir behandeln w induktiv und sehen wie oben, daß wir auf Grund der Relationen annehmen können, daß entweder w mit e_0 aufhört, oder aber es gibt eine Darstellung, die mit e_j , $j > i$ aufhört. So fortfahrend bringen wir das Wort in Normalform (bis auf einen Vorfaktor d^r). \square

(4.4) Satz. *Die Zuordnung „Wort in Normalform“ \mapsto „zugehöriges Produkt in TB_n “ ist eine Bijektion zwischen Normalformenworten und Brücken.*

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß bei der Produktbildung ein Normalformenwort keine Zyklen produziert. Induktion nach der Länge eines Wortes. Nach Induktion können wir $(n-1, n-1)$ -Brücken und Normalformenworte in e_0, \dots, e_{n-2} identifizieren. Eine Zusammensetzung der Form $w e_{n-1} \dots e_i$ mit einem Wort $w \in TB_{n-1}$ kann offenbar keine Zyklen produzieren, da $e_{n-1} \dots e_i$ als einzige horizontale Stränge die von e_{n-1} herrührenden hat.

Nach den voranstehenden beiden Sätzen ist die genannte Zuordnung sicherlich surjektiv. Die Injektivität folgt mittels der im Beweis von Satz (4.2) gewonnenen geometrischen Bedeutung der Normalformen (innerste horizontale Verbindung). Liefern zwei Worte dieselbe Brücke, so haben sie beide die Form

$$w_1 e_{n-1} \dots e_i = w_2 e_{n-1} \dots e_i$$

mit $w_1, w_2 \in TB_{n-1}$. Aus der Gleichheit der Brücken folgt nun sofort, daß w_1 und w_2 dieselben Punkte verbinden, also dieselben Brücken beschreiben und nach Induktion deshalb dieselben Worte sind. \square

(4.5) Satz. *Die Algebra TB_n wird von e_0, \dots, e_{n-1} mit den Relationen (4.1) erzeugt.*

BEWEIS. Sei $T'B_n$ die durch die genannten Erzeuger und Relationen erklärte Algebra. Der kanonische Homomorphismus $T'B_n \rightarrow TB_n, e_j \mapsto e_j$ ist nach (4.2) surjektiv, da jede Brücke Produkt elementarer ist. Nach (4.4) hat aber $T'B_n$ höchstens den Rang von TB_n , da jedes Wort zu einem in Normalform äquivalent ist. \square

Die Tensormodulkategorie TB hat hiernach zwei verschiedene Brückenerzeuger, die e_0 und e_1 entsprechen. Wir gehen auf den Aspekt der Tensorkategorien, etwa nach Art von [11], an anderer Stelle ein.

5. Idempotente Elemente

Wir beschreiben jetzt eine Serie von idempotenten Elementen in der Algebra TB_n ; sie werden induktiv definiert, in Analogie zur Wenzlschen Definition der Idempotenten für die Temperley-Lieb-Algebra [12]. Die dabei gewonnenen zentralen orthogonalen Idempotenten werden für die Zerlegung von TB_n in Matrixalgebren im Abschnitt 7 gebraucht. Wir die folgende Notation. Wir setzen voraus, daß $-d = A^2 + A^{-2}$ ist und eine Einheit in K . Dann sei

$$[m] = [m](A) = \frac{A^m - A^{-m}}{A - A^{-1}}.$$

Alle Werte $[2m+1](A)$ seien in K invertierbar. Das ist zum Beispiel für $K = \mathbb{C}$ und $A = i$ der Fall. Es gilt also $-d = [3] - 1$, sowie $[1](A) = 1$ und $[-1](A) = -1$. Es ist übrigens $[2m+1](A)$ ein Taylor-Polynom in A^2 , und deshalb würde es genügen, den Parameter $p = -A^2$ zu verwenden. Der Gebrauch von A macht die Formeln übersichtlicher; außerdem ist A der Parameter in der Kauffmanschen Theorie [6] und als solcher etabliert. Schließlich sind die Polynome sogar symmetrisch bei $p \rightarrow p^{-1}$ und deshalb sogar Polynome in $d = p + p^{-1}$. Ferner gilt die orthogonale Clebsch-Gordan-Formel¹

$$(5.1) \quad [3][2n+1] = [2n-1] + [2n+1] + [2n+3].$$

(5.2) Satz. *Die Algebra TB_n hat Idempotente*

$$f_0, \dots, f_{n-1}, g_0, \dots, g_{n-1}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

¹Wenn wir $[2n+1]$ als Charakter der $(2n+1)$ -dimensionalen irreduziblen Darstellung von $SO(3)$ deuten!

- (1) $f_0 = 1 + \frac{1}{[3]-1}e_0 = 1 - \frac{1}{c}e_0, \quad g_0 = 1 - f_0 = \frac{1}{c}e_0$
- (2) $f_m = f_{m-1} + \frac{[2m-1]}{[2m+1]}f_{m-1}e_m f_{m-1}, \quad 1 \leq m < n$
- (3) $(e_{m+1}f_m)^2 = -\frac{[2m+3]}{[2m+1]}e_{m+1}f_m, \quad 0 \leq m < n-1$
- (4) $e_j f_m = f_m e_j = 0, \quad 0 \leq j \leq m$
- (5) $Sp_n(f_m) = (-1)^{m+1}d^{n-m-1}[2m+3], \quad 0 \leq m < n$
- (6) $g_m = g_{m-1} + \frac{[2m-3]}{[2m-1]}g_{m-1}e_m g_{m-1}, \quad 1 \leq m < n$
- (7) $(e_{m+1}g_m)^2 = -\frac{[2m+1]}{[2m-1]}e_{m+1}g_m, \quad 0 \leq m < n-1$
- (8) $e_j g_m = g_m e_j = 0, \quad 1 \leq j \leq m$
- (9) $Sp_n(g_m) = (-1)^m d^{n-m-1}[2m+1], \quad 0 \leq m < n$
- (10) $g_m f_m = f_m g_m = 0, \quad 0 \leq m < n$
- (11) $e_0 g_m = g_m e_0, \quad 0 \leq m < n.$

Die vorstehenden Formeln besagen unter anderem, daß f_{n-1} und g_{n-1} zentrale orthogonale Idempotente von TB_n sind.

Zum Beweis benutzen wir das folgende Lemma, das durch einfaches Nachrechnen demonstriert wird.

(5.3) Lemma. *Sei T eine assoziative K -Algebra. Die Elemente $a, d \in K$ und $x, e, f \in T$ sollen die Relationen*

$$f^2 = f, xf = fx, x^2 = dx, xex = x, (ef)^2 = -\frac{1}{a}ef$$

erfüllen. Dann folgt:

- (1) $g := f + afef$ ist ein idempotentes Element.
- (2) $(xg)^2 = (d+a)(xg).$ □

Beweis von Satz (5.2). Man rechnet direkt nach, daß f_0 und g_0 Idempotente sind und die Relationen (3) und (7) für $m = 0$ erfüllt sind. Die Formeln (2) und (3) folgen dann durch Induktion nach m , indem man in Lemma (5.3) $f = f_{m-1}$, $x_{e_{m+1}}$ und $e = e_m$ setzt. Auf Teil (2) des Lemmas wird dann noch (5.1) angewendet. Analog folgen (6) und (7) durch Induktion nach m . Die Formel (4) folgt durch Induktion nach m , unter Verwendung von (2) und (3) im Falle $j = m$. Analog wird (8) behandelt.

Es ist

$$\begin{aligned} Sp_n(f_0) &= Sp_n(1) - \frac{1}{c}Sp_n(e_0) \\ &= d^n - \frac{1}{c}d^{n-1}c \\ &= -d^{n-1}[3], \end{aligned}$$

und das ist (5) für $m = 0$. Damit folgt induktiv

$$\begin{aligned}
Sp_n(f_m) &= Sp_n\left(f_{m-1} + \frac{[2m-1]}{2m+1} Sp_n(f_{m-1}e_m f_{m-1})\right) \\
&= Sp_n(f_{m-1}) + \frac{[2m-1]}{2m+1} Sp_n(e_m f_{m-1}^2) \\
&= Sp_n(f_{m-1})\left(1 + d^{-1} \frac{[2m-1]}{2m+1}\right) \\
&= (-1)^m d^{n-m-1} (d[2m+1] + [2m-1]) \\
&= (-1)^{m+1} d^{n-m-1} [2m+1].
\end{aligned}$$

Dabei wurde (5.1) und (3.3) verwendet. Analog wird (9) behandelt. Gleichung (10) gilt offenbar für $m = 0$ und folgt induktiv mittels (2) und (6). Es gilt offenbar $e_0 g_0 = g_0 e_0$ und $e_0 g_1 = g_1 e_0$; und für $m \geq 2$ verwenden wir (6) im Verein mit $e_0 e_m = e_m e_0$; damit ist auch (11) gezeigt. \square

6. Bedingte Erwartung

Das Element $d \in K$ sei weiterhin invertierbar.

(6.1) Satz. *Es gibt genau eine K -lineare Abbildung*

$$E: TB_n \rightarrow TB_{n-1}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $e_n x e_n = d e_n E(x)$, $x \in TB_n$
- (2) $E(x) = x$, $x \in TB_{n-1}$
- (3) $E(axb) = a E(x) b$, $a, b \in TB_{n-1}$
- (4) $Sp(E(x)) = Sp(x)$.

BEWEIS. Eindeutigkeit. Ist $x \in TB_{n-1}$, so ist x mit e_n vertauschbar und deshalb gilt $e_n x e_n = d e_n x$. Gilt (1), so folgt $e_n x = e_n E(x)$. Aus einer Gleichung $e_n x = e_n y$ mit $x, y \in TB_{n-1}$ folgt $x = y$, was geometrisch klar ist. Also gilt notwendig (2).

Ist $x \notin TB_{n-1}$, so hat x nach Abschnitt 4 die Form $x = a e_{n-1} b$ mit $a, b \in TB_{n-1}$. Es folgt $e_n x e_n = a e_n e_{n-1} e_n b = e_n a b$, so daß wegen (1) in diesem Fall notwendig $E(x) = d^{-1} a b$ ist.

Existenz. Wir definieren eine K -lineare Abbildung E , indem wir ihren Wert auf Brücken x in TB_{n-1} durch $E(x) = x$ und auf den anderen Brücken $x = a e_{n-1} b$ durch $E(x) = d^{-1} a b$ vorschreiben. Dann sind die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt. Die Definition ist sinnvoll, weil aus $a e_{n-1} b = a' e_{n-1} b'$ zunächst $e_n a b = e_n a' b'$ und dann $ab = a'b'$ folgt.

Die Relation (4) ist nur fraglich für Elemente x der Form $a e_{n-1} b$ mit $a, b \in TB_{n-1}$. Die geometrische Definition der Spur liefert für $y \in TB_{n-1}$ die Relation (3.3) $Sp_n(e_{n-1} y) = d^{-1} Sp_n(y)$. Damit folgt die Gleichungskette

$$Sp_n(x) = Sp_n(a e_{n-1} b)$$

$$\begin{aligned} &= Sp_n(e_{n-1}ba) \\ &= d^{-1}Sp_n(ba) \\ &= Sp_n(E(x)), \end{aligned}$$

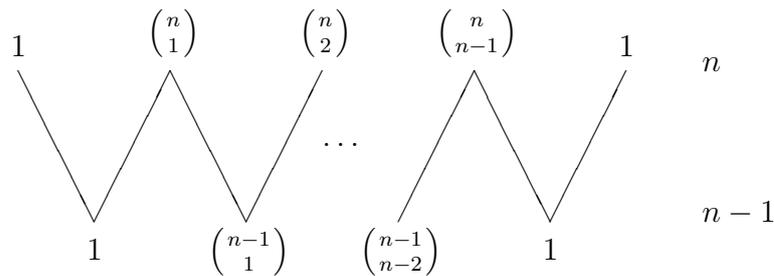
und damit erhalten wir auch die Gleichung (4). □

7. Struktur der Algebra TB_n

Mit den bislang bereitgestellten Hilfsmitteln können wir nun nach bekanntem Muster die Struktur der Algebren für einen generischen Parameter $d = -A^2 - A^{-2}$ bestimmen. Für eine ausführliche Darstellung der Methode siehe [3].

(7.1) Satz. *Die Voraussetzungen über A seien dieselben wie in Abschnitt 5. Dann gilt:*

- (1) $Sp: TB_n \rightarrow K$ ist regulär.
- (2) Die Algebra TB_n ist die direkte Summe von Matrixalgebren der Reihenzahl $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$.
- (3) Das Bratteli-Diagramm der Inklusion $TB_{n-1} \subset TB_n$ hat die folgende Struktur:



Die Gesamtheit der Bratteli-Diagramme entspricht dem Pascalschen Dreieck. In diesem Sinne handelt es sich also hier um eine recht kanonische Situation.

BEWEIS. Nach (5.2) sind f_{n-1} und g_{n-1} zentrale orthogonale Idempotente. Sei I das von e_{n-1} erzeugte zweiseitige Ideal in TB_n . Dann wird I von f_{n-1} und g_{n-1} annulliert. Wir haben einen surjektiven Homomorphismus

$$\varepsilon: TB_n \rightarrow K(e_0)$$

auf die K -Algebra, die von e_0 mit der Relation $e_0^2 = ce_0$ erzeugt wird, und zwar ist $\varepsilon(e_0) = e_0$ und $\varepsilon(e_j) = 0$ für $j > 0$. Es gilt $\varepsilon(f_{n-1}) = 1 - c^{-1}e_0$ und $\varepsilon(g_{n-1}) = c^{-1}e_0$, wie aus der induktiven Definition der Idempotenten folgt. Das Ideal I ist gleich dem Kern von ε , denn alle von e_0 verschiedenen Brücken liegen nach Definition von ε im Kern; und alle e_i , $i > 0$, liegen in I , was durch absteigende Induktion mittels $e_i e_{i+1} e_i = e_i$ folgt. Die Abbildung (mit der Abkürzung $TB_n := T(n)$)

$$\alpha: T(n-1) \otimes_{T(n-2)} T(n-1) \rightarrow I, \quad a \otimes b \mapsto ae_{n-1}b$$

ist surjektiv (siehe (4.2)). Nach allgemeinen Aussagen der linearen Algebra ist die Quelle von α isomorph zu $M := \text{Hom}_{T(n-2)}(T(n-1), T(n-1))$, wobei wir $T(n-1)$ als Rechtsmodul über $T(n-2)$ auffassen. Nach den Überlegungen zur Fundamentalkonstruktion [3], §2.4 und nach der induktiven Kenntnis des Bratteli-Diagramms der Inklusion $T(n-2) \subset T(n-1)$ hat M genau die Dimension von I (beachte (2.4)). Nach der Fundamentalkonstruktion ist die Spur auf I regulär. Da wir die Spur auf den von f_{n-1} und g_{n-1} erzeugten Faktoren nach (5.2) kennen, sehen wir, daß sie überhaupt regulär ist. Aus der Fundamentalkonstruktion folgt nun die Struktur des Bratteli-Diagrammes. \square

8. Die Hecke-Algebra HB_n

Wir werden zeigen, daß die Algebra TB_n in kanonischer Weise ein Quotient einer Hecke-Algebra zum Dynkin-Diagramm B_n ist. Die Quotientdarstellung beruht auf dem algebraisierten Formalismus von Kauffman [6] zur Knotentheorie.

Abhängig vom Parameter $A \in K$ wie bislang definieren wir die Hecke-Algebra $HB_n(A)$ als assoziative Algebra mit 1 über K mit den Erzeugern x_0, \dots, x_{n-1} und den Relationen

$$(8.1) \quad x_i^2 = (q-1)x_i + q, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$(8.2) \quad x_0^2 = (p-1)x_0 + p$$

$$(8.3) \quad x_i x_j x_i = x_j x_i x_j \quad |i-j| = 1, i, j \geq 1$$

$$(8.4) \quad x_0 x_1 x_0 x_1 = x_1 x_0 x_1 x_0$$

$$(8.5) \quad x_i x_j = x_j x_i \quad |i-j| \geq 2.$$

Darin ist

$$q = A^4, \quad p = -A^2.$$

Wie schon in Abschnitt 5 gesagt, braucht man eigentlich nicht den Parameter A sondern nur p . Übrigens entspricht $A = i$ der Degeneration $p = 1$, und das ist in diesem Fall die korrekte Spezialisierung. Die Standardform der Hecke-Algebra zum Coxeter-Graphen B_n hat anstelle von (8.2) auch die Relation (8.1). Im Dynkin-Diagramm aber gehört zu x_0 die kürzere Wurzel, und es scheint zumindest plausibel, hier statt q eine Quadratwurzel zu verwenden. Die Hecke-Algebra zum Graphen A_{n-1} werde mit HA_{n-1} bezeichnet. Sie ist in HB_n enthalten, und zwar wird sie von x_1, \dots, x_{n-1} mit den Relationen (8.1), (8.3) und (8.5) erzeugt. In [5], oder [3, §2.11] wird (mit anderen Parametern und Erzeugern) gezeigt, daß

$$HA_{n-1} \rightarrow TA_{n-1}, \quad x_j \mapsto -A^2 e_j - 1$$

einen surjektiven Homomorphismus von K -Algebren induziert, dessen Kern von den Elementen

$$x_i x_j x_i + x_i x_j + x_j x_i + x_i + x_j + 1, \quad |i-j| = 1$$

erzeugt wird. (Es genügt sogar, nur das Element mit $(i, j) = (1, 2)$ zu verwenden.)
Im folgenden werden wir ein analoges Resultat herleiten.

(8.6) Satz. *Durch die Zuordnungen*

$$\begin{aligned} x_j &\mapsto -A^2 e_j - 1, & j \geq 1 \\ x_0 &\mapsto \frac{1 - A^2}{c} e_0 - 1 \end{aligned}$$

wird ein surjektiver Homomorphismus

$$t: HB_n(A) \rightarrow TB_n(A)$$

induziert.

BEWEIS. Nach dem über HA_{n-1} Zitierten sind hauptsächlich die Verträglichkeiten mit den Relationen (8.2) und (8.4) fraglich. Wir werden deduktiv herleiten, woher der Wert $t(x_0)$ kommt. Wir suchen nach einem Element $y_0 \in TB_2$, das der Relation

$$(8.7) \quad (A^2 e_1 + 1)y_0(A^2 e_1 + 1)y_0 = y_0(A^2 e_1 + 1)y_0(A^2 + 1)$$

genügt. Wenn wir die rechte und linke Seite ausmultiplizieren und gleiche Terme beseitigen, führt diese Bedingung zur Gleichung

$$e_1(A^2 y_0 e_1 y_0 + y_0^2) = (A^2 y_0 e_1 y_0 + y_0^2)e_1,$$

das Element $A^2 y_0 e_1 y_0 + y_0^2$ muß also mit e_1 in TB_2 vertauschbar sein. Sei

$$z = \alpha + \beta e_0 + \gamma e_1 + \delta e_0 e_1 + \varepsilon e_1 e_0 + \eta e_0 e_1 e_0$$

ein allgemeines Element von TB_2 . Die Gleichung $z e_1 = e_1 z$ führt mit den Relationen (4.1) auf die Bedingungen

$$(8.8) \quad \varepsilon = \delta, \quad \beta + d\delta + c\eta = 0.$$

Setzen wir das Element y_0 in der Form $y_0 = u e_0 + v$ an, so ist das fragliche Element

$$z = A^2(u^2 e_0 e_1 e_0 + u v e_0 e_1 + u v e_1 e_0 + v^2 e_1) + u^2 c e_0 + 2u v e_0 + v^2.$$

Also ist $\alpha = v^2$, $\beta = u^2 c + 2uv$, $\gamma = A^2 v^2$, $\delta = A^2 uv$, $\varepsilon = A^2 uv$ und $\eta = A^2 u^2$. Die erste Gleichung in (8.8) ist erfüllt, und die zweite Gleichung liefert die Bedingung

$$(8.9) \quad u^2 v + 2uv + A^2 u v d + A^2 u^2 c = 0.$$

Wir setzen u als invertierbar voraus. Dann ist es keine wesentliche Einschränkung, $u = 1$ anzusetzen, da mit y_0 auch jedes Vielfache die Gleichung (8.7) erfüllt. Dadurch führt (8.9) mittels $-d = A^2 + A^{-2}$ auf

$$v(1 - A^2) + c = 0.$$

Somit erfüllen $e_0 + v$ und

$$y_0 = \frac{1 - A^2}{c} e_0 - 1$$

die Gleichung (8.7). Das inverse von y_0 errechnet sich zu

$$y_0^{-1} = \frac{1 - A^{-2}}{c} e_0 - 1.$$

Ist c eine Funktion von A mit der Eigenschaft $c(A) = c(A^{-1})$, so gilt wichtige Relation

$$y_0(A)^{-1} = y_0(A^{-1}).$$

Das so gewonnene Element y_0 genügt der quadratischen Gleichung

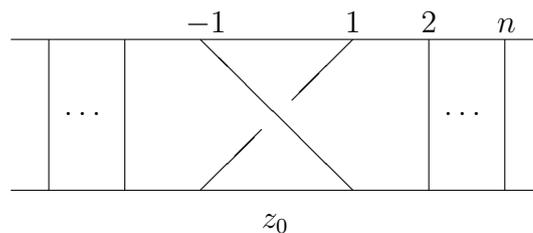
$$y_0^2 = (-A^2 - 1)y_0 - A^2.$$

Also werden mit $t(x_0) = y_0$ die Relationen (8.2) und (8.4) sichergestellt. \square

9. Die Zopfgruppe

Die Zopfgruppe ZB_n zum Coxeter-Graphen B_n wird von den Elementen x_0, \dots, x_{n-1} mit den Relationen (8.3), (8.4) und (8.5) erzeugt. Werden noch die Relationen $x_j^2 = 1$ hinzugefügt, so entsteht die Weyl-Gruppe $W = WB_n$. Wird die Weyl-Gruppe W in üblicher Weise als Spiegelungsgruppe auf einem komplexen Vektorraum V betrachtet und ist X das Komplement der Spiegelungshyperebenen in V , so zeigt Brieskorn [1], daß ZB_n die Fundamentalgruppe des Orbitraums X/W ist. Aus dieser Beschreibung leiten wir eine geometrische Darstellung von ZB_n durch wirkliche Zöpfe her, um den Anschluß an die Knotentheorie zu finden.

Wir betrachten *symmetrische* (n, n) -Zöpfe. Das sind Zöpfe, deren Stränge im Streifen $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ von $[\pm n] \times 0 \times 0$ nach $[\pm n] \times 0 \times 1$ verlaufen und die bezüglich der Drehung um π um die Achse $(0, 0) \times [0, 1]$ symmetrisch sind. Natürlich werden diese Zöpfe bis auf $\mathbb{Z}/2$ -äquivariante Isotopie betrachtet. Durch Aneinanderhängen wird wie üblich aus diesen Zöpfen eine Zopfgruppe gewonnen, die wir vorübergehend mit $Z'B_n$ bezeichnen wollen, da sie sich als isomorph zu ZB_n herausstellen wird. Durch Symmetrisierung gewöhnlicher Zöpfe erhalten wir eine Inklusion der Artinschen Zopfgruppe aus n Strängen $ZA_{n-1} \subset ZB_n$. Praktisch-geometrisch betrachten wir allerdings die ebenen generischen Zopfbilder dieser Zöpfe, wie in der Knotentheorie üblich. Das sind dann symmetrische Kurvensysteme in $\mathbb{R} \times [0, 1]$ mit transversen Unterkreuzungen. Kanonische Elemente z_0, \dots, z_{n-1} in $Z'B_n$ werden durch die folgende Figur angedeutet:



und z_i für $i > 0$ werde durch die entsprechend verlaufende Kreuzung definiert, die i und $i+1$ sowie $-i$ und $-i-1$ kreuzweise verbindet. Diese Elemente erfüllen die Relationen (8.3) – (8.5), mit z anstatt x . Interessant ist insbesondere (8.4): eine Reidemeister-Relation von höherem Typ (höhere Singularität). Durch die Vorschrift $x_j \mapsto z_j$ erhalten wir also einen Homomorphismus $g: ZB_n \rightarrow Z'B_n$.

(9.1) Satz. *Der Homomorphismus g ist ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Das komplexifizierte Wurzelsystem zum Diagramm B_n ist der \mathbb{C}^n mit den Hyperebenen, die durch $z_k = z_l$ für $k \neq l$ sowie durch $z_k = 0$ gegeben sind. Die Weyl-Gruppe $W = WB_n$ wird von den Permutationen der Koordinaten und den Zeichenwechseln $z_k \mapsto -z_k$ erzeugt. Als Grundpunkt für $\pi_1(X/W)$ wählen wir $(1, 2, \dots, n)$. Eine Schleife in X/W werde nach X mit diesem Anfang gehoben und ist dann eine Abbildung $t \mapsto (w_1(t), \dots, w_n(t))$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $(w_1(0), \dots, w_n(0)) = (1, \dots, n)$
- (2) $(w_1(1), \dots, w_n(1)) = (\pm\sigma(1), \dots, \pm\sigma(n))$ mit einer Permutation $\sigma \in S_n$
- (3) Für jedes $t \in I$ sind alle $w_j(t) \neq 0$, und es gilt $w_k(t) \neq w_l(t)$ für alle $k \neq l$.

Wir erhalten daraus einen symmetrischen Zopf v von $[\pm n] \times 0 \times 0$ nach $[\pm n] \times 0 \times 1$, indem wir setzen

$$v(t) = (-w_n(t), \dots, -w_1(t), w_1(t), \dots, w_n(t)) \times \{t\} \in \mathbb{C} \times \{t\}.$$

Jeder symmetrische höhenerhaltende Zopf ist von dieser Art. Man hat jetzt noch zu verifizieren, daß die typischen Erzeuger der symmetrischen Zöpfe den typischen Erzeugern der Brieskornschen Zopfgruppe entsprechen. \square

10. Der Kauffman-Funktor

Für den Vergleich von Geometrie und Algebra ist es in unserem Kontext nützlich, aus dem Kauffman-Parameter A nochmals die Wurzel ziehen zu können. Wir setzen deshalb in unserem Grundring K ein Element $\sqrt{A} = A^{1/2}$ als gegeben voraus.

Wir verwenden die folgenden Zuordnungen

$$z_j \mapsto -A^{-1}x_j, \quad j \geq 1, \quad \text{sowie} \quad z_0 \mapsto -A^{-1/2}x_0$$

und die daraus resultierende Abbildung $z: ZB_n \rightarrow HB_n$. Bei der Zusammensetzung mit dem Homomorphismus t ergibt sich dann für $j \geq 1$

$$(10.1) \quad z_j \mapsto Ae_j + A^{-1},$$

wie in der Kauffmanschen Klammerrelation und Zustandssumme üblich, wogegen sich für die Kreuzung z_0 der Wert

$$(10.2) \quad z_0 \mapsto \frac{A^{3/2} - A^{-1/2}}{A^2 + A^{-2}}e_0 - A^{-1/2} := w_0(A) = w_0$$

ergibt. Es gilt dann

$$w_0(A)w_0(A^{-1}) = 1,$$

wie es sich die Geometrie wünscht.

Mit den Werten (10.1) und (10.2) bilden wir, analog zur Kauffman-Klammer [6], eine Zustandssumme und erhalten einen Funktor von der Kategorie SB der symmetrischen Schlingel (Tangle) bzw. den Schlingelbildern in die Kategorie TB. Die Kategorie SB der symmetrischen Schlingelbilder hat dabei als Objekte $[\pm n]$, $n \in \mathbb{N}_0$, und als Morphismen von $[\pm m]$ nach $[\pm n]$ die Schlingelbilder in $\mathbb{R} \times [0, 1]$ von $[\pm m] \times 0$ nach $[\pm n] \times 1$ mit der hier durchgängig verwendeten $\mathbb{Z}/2$ -Symmetrie.

11. Markov-Spur. Drall. Jones-Polynom. Skein-Relation

Mit Hilfe des Homomorphismus $t: HB_n \rightarrow TB_n$ und der früher auf TB_n geometrisch erklärten Spur können wir Invarianten für symmetrische Knoten, alias Markov-Spuren für symmetrische Zöpfe, definieren. Wir betrachten

$$\tau_n: ZB_n \xrightarrow{z} HB_n \xrightarrow{t} TB_n \xrightarrow{Sp_n} K.$$

Dann gilt für $x \in ZB_n$

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(z_n x) &= -A^{-3} \tau_n(x) \\ \tau_{n+1}(z_n^{-1} x) &= -A^3 \tau_n(x) \\ \tau_1(z_0) &= -A^{-3/2}(A + A^{-1}). \end{aligned}$$

Der Übergang von der Kauffman-Klammer zum Jones-Polynom wird dadurch bewirkt, daß für jede Kreuzung noch der Drall (writhe) berücksichtigt wird. In unserem Fall wird der (multiplikative) Drall eines Diagrammes dadurch definiert, daß eine Kreuzung z_i für $i > 0$ den Drall $-A^{-3}$ erhält und z_0 den Drall $-A^{-3/2}$ und entsprechend die inversen Potenzen für die Gegenkreuzungen. Der *Drall* $\delta(D)$ eines Diagrammes D ist dann das Produkt dieser Werte über alle $\mathbb{Z}/2$ -Orbits von Kreuzungen. Das *Jones-Polynom* eines symmetrischen n -Zopfes D wird durch $\delta(D)\tau_n(D)$ definiert. Es ist eine Invariante bei äquivarianter Reidemeister- und Markov-Äquivalenz.

Unter diesen Vereinbarungen ergeben sich für die Kreuzungen z_i , $i > 0$, die üblichen Skein-Relationen, in selbsterklärender Kurzform notiert als

$$A^{-4}z_i - A^4z_i^{-1} = (A^2 - A^{-2}).$$

Dagegen erhalten wir für z_0 eine modifizierte Skein-Relation

$$A^{-2}z_0 + A^2z_0^{-1} = -(A + A^{-1}).$$

Es gibt in unserer Situation zwei verschiedene Unknoten, nämlich den in Bezug auf die Drehachse symmetrischen; er erhält die Invariante $A + A^{-1}$. Sowie den symmetrisierten gewöhnlichen; er erhält wie bislang den Wert $A^2 + A^{-2}$.

12. Idempotente in der Hecke-Algebra

Wir demonstrieren zum Schluß die Konsistenz der Algebra dadurch, daß wir die Idempotenten $f_{n-1} \in TB_n$ aus kanonischen Elementen von HB_n gewinnen, wie etwa in [7] für die gewöhnliche Temperley-Lieb-Algebra ausgeführt (siehe auch [8]). Die fraglichen Elemente sind gewichtete Summen über alle absteigenden Zöpfe. Ein Zopf heißt dabei absteigend, wenn, im Zopfbild betrachtet, die bei $-n, -(n-1), \dots, n$ beginnenden Stränge in Bezug auf die Höhe über der Zeichenebene eine monoton fallende Folge bilden. In einem absteigenden Zopf haben je zwei Stränge höchstens eine Kreuzung. Diese Zöpfe entsprechen genau den Worten in der Coxeter-Gruppe (Weyl-Gruppe) WB_n von minimaler Darstellung in Bezug auf die fundamentalen Wurzeln x_0, \dots, x_{n-1} .

Wir setzen im folgenden $q_j = q$ für $j \geq 1$ und $q_0 = p$. Die Algebra HB_n hat vier eindimensionale Darstellungen (Charaktere), die durch die folgenden Zuordnungen gegeben sind:

$$\begin{aligned} \chi_1: & x_j \mapsto q_j \\ \chi_2: & x_j \mapsto -1 \\ \chi_3: & x_j \mapsto q_j \quad \text{für } j \geq 1, \quad x_0 \mapsto -1 \\ \chi_4: & x_j \mapsto -1 \quad \text{für } j \geq 1, \quad x_0 \mapsto q_0. \end{aligned}$$

Ist χ ein solcher Charakter, so erfüllt das Element

$$\psi_\chi = \sum_{w \in WB_n} (-1)^{l(w)} \chi(x(w)^{-1}) x(w)$$

eine Gleichung der Form

$$\psi_\chi^2 = Q_\chi \psi_\chi,$$

wobei

$$Q_\chi = \sum_{w \in WB_n} \chi(x(w)^{-1})^2 \chi_1(x(w)).$$

In diesen Formeln ist $l(w)$ die übliche Längenfunktion der Spiegelungsgruppe WB_n bezüglich x_0, \dots, x_{n-1} und $x(w)$ das entsprechende Produkt in HB_n . Indem wir ψ_χ durch Q_χ dividieren, erhalten wir also ein idempotentes Element φ_χ von HB_n . Sei $\varphi(j)$ das zu χ_j gehörende idempotente Element.

(12.1) Satz. *Es gilt $t(\varphi_1) = f_{n-1}$ und $t(\varphi_3) = g_{n-1}$. Die Elemente φ_2 und φ_4 liegen im Kern von t .*

BEWEIS. Das Idempotente f_{n-1} ist dadurch charakterisiert, daß es alle Elemente e_j annulliert und die Augmentation 1 hat. Letzteres ist für $t(\varphi_k)$ nach Konstruktion richtig. Um die erste Eigenschaft nachzuweisen, zeigt man, daß sich in $e_j t(\varphi_n)$ jeweils die Summanden paarweise wegheben. Das beruht auf der folgenden gruppentheoretischen Eigenschaft: Sei S_j die Menge der Gruppenelemente, die eine mit x_j beginnende reduzierte Darstellung haben und T_j das Komplement. Dann ist $w \mapsto x_j w$ eine Bijektion $S_j \rightarrow T_j$. Die hier gebrauchten elementaren Tatsachen

über Spiegelungsgruppen und ihre Längenfunktion kann man etwa in [4] bequem nachlesen. Mit Kenntnis dieser Gruppentheorie folgt dann mit den Relationen

$$e_j(-A^2e_j - 1) = A^4e_j, \quad j \geq 1$$

$$e_0\left(\frac{A^2 - 1}{A^2 + A^{-2}}e_0 - 1\right) = -A^2e_0$$

die gewünschte Aussage über φ_1 . Die anderen Elemente behandelt man analog. \square

Der Nenner der idempotenten Elemente φ_j ist ein modifiziertes Poincaré-Polynom. Weil wir nicht mit den Coxeter-Graphen arbeiten sondern mit den Dynkin-Diagrammen, haben wir, abweichend vom üblichen Vorgehen in der kombinatorischen Gruppentheorie, eine gewichtete Längenfunktion L zu verwenden, und zwar erhalten die Erzeuger x_j für $j \geq 1$ die Länge 2, während x_0 die Länge 1 erhält. (Wegen der Relation (8.4) und der allgemeinen Theorie des Wortproblems [10] in Coxeter-Gruppen, auch dargestellt in [2], ist diese Länge wohldefiniert.) Das ändert natürlich das üblicherweise betrachtete Poincaré-Polynom der Gruppe. Für die klassische Definition hat WB_2 das Polynom

$$\frac{t^4 - 1}{t - 1} \cdot \frac{t^2 - 1}{t - 1}$$

wohingegen in unserem Fall das Polynom gleich

$$\frac{t^4 - 1}{t - 1} \cdot \frac{t^6 - 1}{t^3 - 1}$$

ist. Ist $P(t)$ das resultierende Poincaré-Polynom, so ist Q_{x_1} der Wert dieses Polynoms an der Stelle p^{-1} .

Zur Abrundung teilen wir noch eine Produktdarstellung des modifizierten Poincaré-Polynoms mit.

(12.2) Satz. *Das Poincaré-Polynom der oben definierten Längenfunktion L der Spiegelungsgruppe WB_n ist gleich*

$$P(t) = \prod_{j=1}^n \frac{t^{2j} - 1}{t^2 - 1} \cdot \prod_{j=1}^n (t^{2j-1} + 1).$$

Das erste Produkt ist das Poincaré-Polynom der symmetrischen Gruppe S_n an der Stelle t^2 .

Ein Beweis wird etwa durch Induktion nach n geführt, wobei beachtet wird, daß sich sukzessive Polynome teilen, sowie daß das Polynom der symmetrischen Gruppe, wie im Satz angegeben, ein Teiler sein muß.

13. Literatur

1. Brieskorn, E. [1971]: Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe. *Invent. Math.* 12, 57 – 61.
2. Brown, K. S. [1989]: *Buildings*. New York – Berlin, Springer.
3. Goodman, F. M., de la Harpe, P., and V. F. R. Jones [1989]: *Coxeter graphs and towers of algebras*. New York – Berlin, Springer.
4. Humphreys, J. E. [1990]: *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge, University Press.
5. Jones, V. F. R. [1987]: Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. of Math.* 126, 335 – 388.
6. Kauffman, L. H. [1987]: State models and the Jones polynomial. *Topology* 26, 395 – 407.
7. Kauffman, L. H. [1990]: Spin networks and knot polynomials. *Int. J. of Mod. Phys. A* 5 81, 93 – 115.
8. Kauffman, L. H. [1992]: *Knots and physics*. Singapore, World Scientific.
9. Temperley, H. N. V., and E. H. Lieb [1971]: Relations between the “percolation” and “colouring” problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the “percolation” problem. *Proc. Roy. Soc. (London) Ser A* 322, 251 – 280.
10. Tits, J. [1969]: Le problème des mots dans les groupes de Coxeter. *Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/68)*. Vol. 1, 175 – 185.
11. Turaev, V. G. [1990]: Operator invariants of tangles and R -matrices. *USSR Izvestia* 35, 411 – 444.
12. Wenzl, H. [1987]: On sequences of projections. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada IX*, 5 – 9.