Vorlesungskommentar – Wintersemester 22/23

Mathematisches Institut der Georg-August-Universität Göttingen

21. September 2022

Einleitung

Aufgrund der Pandemie ist die Planung weiterhin erschwert und viele der Termine und Formate stehen nicht fest bzw. können Änderungen unterworfen sein. Bitte im Zweifelsfall also die Daten aus **Stud.IP**, **Ecampus** und den ganzen Ordnungen (`https://www.math.uni-goettingen.de/service/ordnungen.html`) beachten oder auch einfach beim entsprechenden Lehrpersonal nachfragen. Bitte auch auf Updates dieses Kommentars achten.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorlesung: Differenzial- und Integralrechnung I **3**

2 Vorlesung: Analytische Geometrie und Lineare Algebra I **4**

3 Vorlesung: Mathematische Grundlagen in der Biologie, in den Geowissenschaften und in der Molkularen Medizin (Mathe für Bio/Geo/MolMed) **6**

4 Vorlesung: Mathematik für Studierende der Physik I (MaPhy 1) **7**

5 Vorlesung: Mathematik für Studierende der Physik III (MaPhy 3) **8**

6 Vorlesung: Differenzial- und Integralrechnung III **9**

7 Vorlesung: Algebra **11**

8 Vorlesung: Diskrete Mathematik für Studierende der Informatik **12**

9 Reading Course: Category theory in context **13**

10 Reading Courses: Noncommutative geometry **14**

11 Vorlesung: Algebraic topology I **16**

12 Vorlesung: Analytic Number Theory I **17**

13 Vorlesung: Algebraic Number Theory II **18**

14 Vorlesung: von Neumann Algebras in Quantum Field Theory **19**

15 Lecture course (Z3 SP2): Cohomology of varieties and schemes **20**

16 Vorlesung: Geometric Logic **21**

17 Proseminar: Quadratische Formen **22**

18 Proseminar: Elementare Differentialgeometrie **23**

19 Proseminar: Darstellungstheorie endlicher Gruppen **24**

20 Seminar: Elliptic Curves **25**

21 Seminar: Topics in functional analysis **27**

22 Seminar: Complex geometry and Hodge theory **28**

23 Seminar: Morse theory **29**

24 Seminar: Arithmetic statistic **30**

25 Seminar: Die Sätze von Banach-Tarski und von Tarski **31**

26 Seminar: Sofic Groups **32**

27 Oberseminare **33**

28 Mathematische Gesellschaft und weitere Termine **33**

1 Vorlesung: Differenzial- und Integralrechnung I

Dozent/Art/Credits: Ingo Witt – Vorlesung mit Übung – 9 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Übungen: Mittwochs

Zusätzlich: Saalübung (Christian Jäh) dienstags, Tutorium (Jäh/Witt) mittwochs

Zielgruppe/Sprache: Erstes Semester – deutsch

Vorkenntnisse: Abiturwissen

Beschreibung

Der Kurse "Differenzial- und Integralrechnung I/II" im ersten und zweiten Semester sind grundlegend für Ihr Mathematikstudium.
In diesem Semester werden wir folgende Themen behandeln:

1. Grundlagen: Mathematische Logik, Mengenlehre, reelle Zahlen,
2. Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit,
3. Differenzierbarkeit: Ableitung einer Funktion, Bestimmung von Extremwerten,
4. Integration: Riemann-Integral, Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung, unbestimmte Integrale, uneigentliche Integrale, Parameterintegrale,
5. Unendliche Reihen: Konvergenzkriterien, Beispiele,
6. Funktionenfolgen und -reihen: gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen, Taylorformel mit Restglied,
7. Fourierreihen: Dirichletkern, Fejérkern, Konvergenzsätze.

Literatur

- O. Forster: Analysis 1
- K. Königsberger: Analysis 1
- I. Witt, Skript zur Diff I

2 Vorlesung: Analytische Geometrie und Lineare Algebra I

Dozent/Art/Credits: Preda Mihăilescu – Vorlesung mit Übung – 9 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen/Klausur

Termine Vorlesungen: Dienstag und Freitag 10-12

Termine Übungen: Donnerstag und Freitag

Termine zusätzlich: Saalübung Donnerstag, Tutorium Freitag Nachmittag

Zielgruppe/Sprache: Erstes Semester, Deutsch

Vorkenntnisse: Schule.

Beschreibung

Dies ist der erste Teil der Vorlesung AGLA, die im Sommersemester weitergeführt wird.

- Die Vorlesung wird eingeleitet durch eine Wiederholung von Vektorgeometrie aus Schulvorkenntnissen, und Einführung der komplexen Zahlen und elementarer Algebra – Gruppentheorie, Äquivalenzrelationen, Ringe, Körper und Faktorringe – mit Beispielen.

- Es werden die Möbiusabbildungen, als geometrische Anwendung von komplexen Zahlen und Gruppentheorie studiert.

- Danach folgt eine Einführung in die wichtigsten Themen der linearen Algebra – Verktorräume, Eigenwerte und Eigenvektoren, Normalformen, Bilinearformen, etc. – in den Anschauungsräumen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Damit werden diese Grundbegriffe in einem geometrisch vorstellbaren Kontext erlernt.

- Vor Weihnachten wird die systematische, formale Untersuchung von Vektorräumen begonnen.

- Der Beispielvorrat wird erweitert auf Vektorräume über unterschiedlichen, endlichen und unendliche Körpern.

- Anhand von diesen Beispielen wird die allgemeine Theorie von linearen Abbildungen, Basistransformationen, Eigenwerte und Eigenvektoren, Normalformen und Bilinearformen bearbeitet. Der Übergang zum zweiten Semester geschieht mit diesem Stoff, und der behandelte Stoff wird angepasst am mittleren Lerntempo der Studierenden. Es werden auch reichlich Wiederholungen angeboten, zur Befestigung des Lernstoffs und zur Klausurvorbereitung.

- Die *Praktika (=Tutorium)* sind ein wesentlicher Bestandteil der Lehre, dort bin ich präsent und sie haben die Gelegenheit Arbeitsgruppen zu bilden, und durch ihre Fragen an den Professor und die Assistenten, ein Feedback über den Verständnisstand zu bekommen.

Der Stoff folgt im Wesentlichen den Büchern AGLA I und AGLA II von Prof. Ina Kersten, die im Universitätseigenen Verlag zu finden sind (auch online). Die Reihenfolge der Behandlung wird nicht dem Buch folgen, und zusätzlich behandelte Themen werden durch eigene Skripts begleitet.

Literatur

- Ina Kersten – AGLA I und II (Universitätsverlag Göttingen).

3 Vorlesung: Mathematische Grundlagen in der Biologie, in den Geowissenschaften und in der Molkularen Medizin (Mathe für Bio/Geo/MolMed)

Dozent/Art/Credits: Stefan Wiedmann – Vorlesung mit Übung – 6 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Vorlesungen: Inverted: Vorlesung wird aufgezeichnet und Fragestunde dazu angeboten (vsl. Mittwoch 8-10).

Übungen: Wöchentlich in Kleingruppen (vsl. Donnerstag Nachmittags).

Zusätzlich: Tutorium zur Hausaufgabenhilfe (vsl. Montag 16-20).

Zielgruppe/Sprache: Erstes Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: Solide Grundkenntnisse der Schulmathematik im Rahmen eines Grundkurses. Teilnahme an universitären Vorkursen empfohlen.

Beschreibung

Wir behandeln grundlegende Themen der Analysis und der linearen Algebra. Soweit die Zeit reicht werden zum Abschluss Themen der Dynamik behandelt (Populationsdynamik, Zerfalls- und Wachstumsprozesse).

Literatur

- Ina Kersten, *Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften*, Universitätsdrucke Göttingen.

4 Vorlesung: Mathematik für Studierende der Physik I (MaPhy 1)

Dozent/Art/Credits: Ralf Meyer – Vorlesung mit Übung – 12 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Vorlesungen: 6 SWS

Übungen: 2 SWS

Zusätzlich: Saalübung (Jonathan Taylor)

Zielgruppe/Sprache: Physikstudierende im ersten Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: Solide Grundkenntnisse der Schulmathematik im Rahmen eines Grundkurses. Teilnahme an universitären Vorkursen empfohlen.

Beschreibung

Wir behandeln grundlegende Themen der Analysis und der linearen Algebra mit gelegentlichen physikalischen Anwendungen.

5 Vorlesung: Mathematik für Studierende der Physik III (MaPhy 3)

Dozent/Art/Credits: Ingo Witt – Vorlesung mit Übung – 6 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Vorlesungen: 2 SWS

Übungen: 2 SWS

Zusätzlich: Saalübung

Zielgruppe/Sprache: Physikstudierende im dritten Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: Kenntnisse der Inhalte aus MaPhy I, II

6 Vorlesung: Differenzial- und Integralrechnung III

Dozent/Art/Credits: Thomas Schick – Vorlesung mit Übung – 9 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Vorlesungen: 4 SWS

Übungen: 2 SWS

Zusätzlich:

Zielgruppe/Sprache: Ab drittem Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: Diff I/II; Agla I/II.

Beschreibung

In Diff II wurde erarbeitet: metrische Räume, Banach- und Hilberträume, Differentialrechnung in mehreren Variablen, das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}^n$, die Theorie von glatten Untermannigfaltigkeiten der $\mathbb{R}^n$ (unter Anwendung des Satzes über implizite Funktionen), die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, außerdem ein klein wenig zur komplexen Differenzierbarkeit, und als Hilfsmittel der Banachsche Fixpunktsatz.
Eines der wichtigen Ziele von Diff III sind die klassischen Integralsätze: Satz von Gauss, Satz von Stokes. Wir werden die Theorie von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ vertiefen (und am Ende ausbauen zu abstrakten Mannigfaltigkeiten). Wir werden uns intensiv mit der Integrationstheorie über Untermannigfaltigkeiten beschäftigen (sowohl für Skalar- als auch für Vektorwertige Funktionen). Die Integralsätze sind die mehrdimensionalen Cousins des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und erlauben, die Berechnung gewisser Integrale über eine Mannigfaltigkeit auf ein Integral über den Rand zu reduzieren.
Die systematische Zusammenfassung der Skalar- und Vektorwertigen Integranden wird durch Tensorfelder und Differentialformen gegeben, die wir entsprechend kennen (und hoffentlich lieben) lernen werden. Hier erhalten die Integralsätze eine besonders plakative Form.
Wenn es zeitlich passt, werden wir Spezialfälle der Integralsätze anwenden, um erste Elemente der Funktionentheorie, wie den Cauchy-Integralsatz und den Residuensatz (spezielle Form) zu entwickeln.
Zum Ende werden wir noch einen Ausflug in die Welt der topologischen (Deformations)-Invarianten machen und erarbeiten, wie man solche mit Hilfe von Differentialformen erhält und anwenden kann.

Literatur

- Barner, Flor: Analysis II

- Bott, Tu: Differential forms in algebraic topology
- Bröcker, Jänich: Einführung in die Differentialtopologie
- Königsberger: Analysis II
- Lee: Introduction to smooth manifolds
- Lück: Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten

7 Vorlesung: Algebra

Dozent/Art/Credits: Chengchang Zhu – Vorlesung mit Übung – 9 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Vorlesungen: TBA

Übungen: TBA

Zielgruppe/Sprache: Ab drittem Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: Pflichtkurse des ersten Studienjahrs.

Beschreibung

Wir behandeln die wichtigsten algebraischen Strukturen: Gruppen, Ringe, Polynome und Körper. Konzepte und Methoden, die in dieser Vorlesung vorgestellt werden, gehen in viele weiterführende Veranstaltungen ein, ein Kurs über Algebra gehört deshalb zu jedem soliden Mathematikstudium und ist für das dritte Semester empfohlen.
Der Kanon für eine Algebra-Vorlseung ist seit langer Zeit stabil, deshalb gibt es viele gute und schlechte und alte und neue Bücher, die fast immer denselben Stoff behandeln.

8 Vorlesung: Diskrete Mathematik für Studierende der Informatik

Dozent/Art/Credits: Evelina Viada – Vorlesung 9 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Übungen und Vorrechnen / Schrifliche Prüfung

Termin: Wöchentlich 4+2

Zielgruppe/Sprache: Studierende der Informatik 1. Semester / Deutsch

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Diese Vorlesung richtet sich an Studierende der Informatik und gibt einen Überblick über die wichtigsten Bereiche der diskreten Mathematik. Alle Themen werden eingeführt, ohne dass dabei tieferes mathematisches Vorwissen vorausgesetzt ist. Die Übungen sind Pflicht und sind notwendig, um die Inhalte zu verstehen. Die behandelten Themen sind:

- Grundlagen der Mathematik und Logik,
- Natürliche Zahlen und vollständige Induktion,
- Elementare Zahlentheorie,
- Elementare Kombinatorik,
- Graphentheorie,
- Restklassenringe und das RSA-Verschlüsselungsverfahren,
- Algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe und Körper) (Falls Zeit)

Literatur

[1] L. Pottmeyer, Diskrete Mathematik: Ein kompakter Einstieg, Springer Spektrum, 2019
[2] M. Aigner, Diskrete Mathematik, 5th ed., Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2004.
[3] J. Matoušek and J. Nešetřil, Diskrete Mathematik: Eine Entdeckungsreise, 2nd ed., Springer, 2007.
[4] A. Steger, Diskrete Strukturen, Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra, 2nd ed., Springer, 2007.
[5] G. Teschl and S. Teschl, Mathematik für Informatiker, Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra, 4th ed., Springer, 2013.

9 Reading Course: Category theory in context

Dozent/Art/Credits: Ralf Meyer and Stefano Roncchi – reading course – 9 C

Präsenz/Online: Recorded lectures plus exercises in presence and online discussion sessions

requirements/exam 50% in exercises – oral exam

time slot lectures are recorded, exercises ???, ??? discussion sessions

target group/language: beginning MSc and 3rd year BSc students – english

prerequisites only basic mathematics courses

This course studies category theory, starting with the basic definitions, the Yoneda lemma, and moving on to (co)limits, adjoint functors, monads, and Kan extensions (at the end of the course and rather briefly). It rather closely follows the book by Emily Riehl mentioned below. I left out some topics and added only very things that are related to my own research. When I offered this course in the summer 2019, I recorded it for the benefit of some students who could not attend the classes because of other courses. I offered this course again as a purely digital course in the summer term 2020, and since it worked quite well back then, I have offered it regularly about once a year since then. The recordings were almost complete, and I have added a few missing ones for a previous reiteration of this course. In addition to the recorded lectures and the textbook, there will be regular online meetings of about an hour each week with me to discuss your questions about category theory.
Riehl's book is very suitable for self-study. It illustrates all new concepts with examples from different areas. You may ignore examples from areas you are unfamiliar with. In my lectures, I chose those examples that I particularly liked. Depending on whether you prefer watching videos or reading a book, either the lectures or the book would suffice as course material.
Since categories are very basic objects, this course has no serious prerequisites. It is helpful if you have already met Emmy Noether's conceptual mathematics, which highlights concepts and structures. A broader background in pure mathematics is not needed, but it would help you appreciate more of the applications and examples of the categorical concepts.

Literature

- Emily Riehl, Category theory in context, Dover (2017), or available on the author's home page.

10 Reading Courses: Noncommutative geometry

Dozent/Art/Credits: Ralf Meyer – three reading courses – 3–6 C each

Präsenz/Online: Recorded lectures plus, perhaps, discussion sessions

requirements/exam none (no exercises offered) – oral exam

time slot to be discussed

target group/language: MSc students interested in noncommutative geometry – english

prerequisites basic mathematics courses; for one of them, functional analysis, and for another, algebra

Description

I have offered two 4-hour lecture courses in the area of noncommutative geometry in the summer term 2020 that are suitable for self-study. Namely, the course Noncommutative Geometry I (C*-algebras) and the course Noncommutative Geometry IV (Noncommutative Differential Geometry). The numbers do not mean anything, both courses are independent and could be your first course in noncommutative geometry.
There is also a 2-hour lecture course on topological phases of matter, which is also quite suitable as a first course in noncommutative geometry, if you are interested also in mathematical physics. It starts with a crash course in quantum mechanics, aimed at mathematicians, and ends in a study of homotopy classes of symmetry-protected Hamiltonians. It does not use K-theory much, and C*-algebras only play a very minor role. Some algebraic topology occurs, but if you are interested in the applications, you should be able to absorb the necessary homotopy theory. The course comes with lecture notes and recordings of my classes.
The C*-algebra course starts out by introducing the most important results in the theory of C*-algebras, following roughly the first chapter in Davidson's book "C*-algebras by example". Then I study some classes of C*-algebras, highlighting group C*-algebras and crossed products for group actions because they are most relevant for my own research. The C*-algebra course is based on a functional analysis course that I offered in the summer term 2018 (and also recorded, by the way). (The C*-algebra course was first offered in the winter 2018–9.) So I treat results from general functional analysis such as the Hahn–Banach Theorem, dual spaces, or the spectrum of Banach algebras rather briefly in this course. I would consider a functional analysis course a prerequisite for this course.
The C*-algebra course was recorded in the winter term 2018–9 for the benefit of some students who could not attend in person, and offered again in the summer term 2020. The recordings are almost complete; a few recordings did not work because of technical problems. Nevertheless, the material is suitable for self-study, as proven by several students who took this course in 2020.

The noncommutative differential geometry course avoids analysis and aims at Hochschild and periodic cyclic homology, which are among the most basic topological invariants in noncommutative geometry. I do not treat K-theory, which is the other important topological invariant, because that was treated in the summer term 2019. (The recordings of the K-theory course mostly failed to work because of technical problems. So I do not recommend this as self-study material. If you really want to learn K-theory, then you have to take a very bare reading course based only on books.) The noncommutative differential geometry course starts with the basic paradigm of carrying over concepts from classical geometry such as points and tangent vectors to noncommutative algebras. This leads to a rather careful study of Hochschild cohomology and a brief introduction to periodic cyclic cohomology.
The lecture notes of the noncommutative geometry course started out many years ago and were updated during the summer term 2020. They are accompanied by recordings of introductory presentations by me, which highlight the main points in the different sections of the book. Here one section corresponds roughly to the material for one lecture. This course was offered in the summer term 2020 purely online, without exercises. It is quite suitable for self-study.
I will be teaching MaPhy1-3 in the coming semesters. This does not leave me much time for specialised courses in my research subject. Therefore, these reading courses may be the best option for you if you want to learn noncommutative geometry during your master's studies. You may find the course material by going to the summer term 2020 and registering in Stud.IP for the relevant course by me in that semester. Please drop me an email if you would like to take this reading course. If enough students are interested – say, at least 5 – I would be happy to offer regular discussion sessions.

Literature

- My own lecture notes for the noncommutative differential geometry and the topological phases courses.
- Davidson, C*-Algebras by Example.

11 Vorlesung: Algebraic topology I

Dozent/Art/Credits: Federico Vigolo - Vorlesung mit Übung - 9 C

Vorleistung/Prüfung: 50 % der Hausaufgaben und Vorrechnen - mündliche Prüfung oder Klausur

Vorlesungen: 4 SWS

Übungen: 2 SWS

Zielgruppe/Sprache: Master - Englisch

Vorkenntnisse: analysis 1 and 2, linear algebra are definite prerequisites. Analysis III and Algebra are helpful

Description

This is the first part of the cycle on Algebraic topology and Riemannian geometry. Lecturer for the first part is Federico Vigolo, who will start as (junior) professor in Göttingen fall 2022. The cycle will be continued by Thomas Schick.
In the first semester, we will introduce a very limited amount of necessary basic topology (constructions of new topological spaces from old ones, some general properties, several concepts of deformation).
The focus will be on the introction of the algebraic tools of algebraic topology. This includes the fundamental group (easy to define but not so easy to compute) and homology groups (more difficult to define, but computationally more convenient). Applications include the Brower fixed point theorem the Euler characteristic.
The basis for much of this is homological algebra; foundations will be laid in the course.

Literature

There are many very nice textbooks on the subject which would all be suitable. Preferences depend on the taste of the reader. Examples (titles typically something with „Algebraic topology“)

- Dold
- tom Dieck
- Bredon: Geometry and topology
- Switzer
- Lück
- Hatcher
- Massey

12 Vorlesung: Analytic Number Theory I

Dozent/Art/Credits: Damaris Schindler - Vorlesung mit Übung - 9 C

Vorleistung/Prüfung: 50 % der Hausaufgaben und Vorrechnen - mündliche Prüfung oder Klausur

Vorlesungen: TBA

Übungen: 2 SWS

Zielgruppe/Sprache: Master - Englisch

Vorkenntnisse: analysis 1 and 2, linear algebra are definite prerequisites. Algebra, number theory and complex functions are helpful

Beschreibung

This is the first part of the cycle on analytic number theory and rational points on varieties

Literatur

- see full cycle description

13 Vorlesung: Algebraic Number Theory II

Dozent/Art/Credits: Linda Frey - Vorlesung mit Übung - 6 C

Vorleistung/Prüfung: 50 % der Hausaufgaben und Vorrechnen - mündliche Prüfung oder Klausur

Vorlesungen: voraussichtlich mittwochs oder donnerstags, 2 SWS

Übungen: 2 SWS

Zielgruppe/Sprache: Master - Englisch

Vorkenntnisse: Algebraic Number Theory Wintersemester 21/22

Beschreibung

Wir werden in der Vorlesung fortgeschrittene Themen in der algebraischen Zahlentheorie behandeln. Wir werden mit elliptischen Kurven anfangen und dann in verschiedene Richtungen Vertiefungen behandeln.

Literatur

-

14 Vorlesung: von Neumann Algebras in Quantum Field Theory

Dozent/Art/Credits: Bahns - Lecture and exercise class - Cycle III (Mathematical Methods in Physics)

Vorlesungen: 4 SWS, time tba

Übungen: 2 SWS, time tba

Zielgruppe/Sprache: Master - Englisch

Vorkenntnisse: Functional Analysis, preferably cycle II on von Neumann Algebras and if possible, cycle I on Operator theory (spectral theory)

Beschreibung

This is the third part of the cycle on Operator theory (within the cycle on Mathematical Methods in Physics). It can be followed independently of part I and II, provided some background in von Neumann algebras is known. After focusing on Spectral theory in part I of the cycle and von Neumann algebras (mainly type I and II) in part II of the cycle, this term, we will study the more difficult type III algebras. Particular emphasis is put on modular theory. Applications in algebraic Quantum Field Theory will be discussed, but from a mathematical point of view, so no prior knowledge in QFT is required.

Literatur

see StudIP pages, once they are up.

15 Lecture course (Z3 SP2): Cohomology of varieties and schemes

Lecturer: Frank Gounelas

Lectures: Twice a week.

Prerequisites: Algebraic Geometry I and II of 2021/2022, or a basic course on varieties and schemes.

Exercise sessions: Jonas Baltes, TBD.

Language: English.

Audience: Advanced Bachelor or Masters students.

Exam requirements: At least 50% in the homework.

Description

This is a continuation course to 'Algebraic Geometry II' offered last semester. It will be an introductory course to the sheaf cohomology of schemes and its applications to varieties. Some of the topics we will be covering are the following:

- Sheaf cohomology: the Cech and derived approach.
- Cohomology of projective space.
- Morphisms to projective space and linear systems.
- Flat and smooth morphisms, families of varieties, generic smoothness and Bertini theorems.
- An overview of the main theorems: Serre duality, base change, the formal function theorem, semicontinuity.
- Applications to the classification of curves: linear systems on curves, canonical embeddings.
- Applications to the classification of surfaces: Castelnuovo's theorem, minimal and canonical models.

References

We will follow a mixture of references, but mostly Ottem-Ellingsrud's Scheme Theory notes and Hartshorne's book. Other references are the classical sources on the matter such as Mumford's Red book, Mumford-Oda, whereas some newer references are Liu's book, Eisenbud-Harris. Another great reference are the notes by Vakil.

16 Vorlesung: Geometric Logic

Dozent/Art/Credits: Stuhler - Vorlesung, 3 C via mündlicher Prüfung.

Vorlesungen: 2 SWS, voraussichtlich Donnerstag 12-14 Uhr

Zielgruppe/Sprache: Master - Englisch, eventuell, je nach Hörern, Deutsch.

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen, einfache Kenntnisse in Algebra und Topologie.

Beschreibung

Gegeben wird eine Einführung in die Mathematische Logik, also insbesondere (logische) Sprachen und Theorien erster Stufe, Prädikatenlogik, Modelle, die Gödelschen Sätze (Vollständigkeitssatz und Nichtstandardmodelle sowie einige Unvollständigkeitsresultate). Wichtige Beispiele sind Zahlentheorie und Mengenlehre, formuliert als Theorien erster Stufe. Parallel dazu wird die Theorie der sog. Topoi vorgestellt,die man etwa als variable Mengenlehre (über einem topologischen Raum) ansehen kann. Sie erlaubt einen sehr funktoriellen Zugang zu sog. intuitionistischen Logiken und liefert darüber hinaus ein großes Reservoir an natürlichen Beispielen. Eine besondere Anwendung ist hier außerdem ein durchsichtiger Zugang zum Beweis der Unabhängigkeit der Cantorschen Kontinuumshypothese von den Axiomen der Mengenlehre.

Literatur

Für die Theorie der Topoi ist die Standardreferenz: S.MacLane, Ieke Moerdijk: Sheaves in Geometry and Logic.(Springer, 1992).
Genannt sei auch Jacob Lurie: Categorical Logic. Vorlesung, Harvard University 2018.(auf J.Luries homepage)
Als Literatur zur Logik: W.Rautenberger: Einführung in die Mathematische Logik (Vieweg 2002)(englische Übersetzung existiert)
sowie etwa Yu.I.Manin: A Course in Mathematical Logic, 2.te Auflage (Springer 2012).

.

17 Proseminar: Quadratische Formen

Dozent/Art/Credits:Brüdern – Proseminar – 3C

Zielgruppe: 3. Studienjahr BSc

Vorkenntnisse: Algebra

Vorbesprechung: 15. Sept., 10 Uhr

Beschreibung

Quadratische Formen tauchen immer wieder in den verschiedensten Teilen der Mathematik auf. Dieses Proseminar soll ihre algebraischen Eigenschaften in den Vordergrund stellen. Es wendet sich gezielt an Studierende im 3. Studienjahr, die bereits eine Algebra-Vorlesung gehört haben. Details zur Vorbesprechung in StudIP, sobald es das gibt - sonst im MatheForum und hier ergänzt. Wer nicht kommen kann, melde sich am besten per Email. 13 Plätze, first come first served.

Literatur

Martin Kneser, Rudolf Scharlau: Quadratische Formen

18 Proseminar: Elementare Differentialgeometrie

Dozent/Art/Credits: Bahns – Proseminar – 3C

Zielgruppe: 2. oder 3. Studienjahr BSc

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen 1. Studienjahr

Vorbesprechung: Via StudIP und erste Sitzung

Beschreibung

Wir werden das Buch [dC] durcharbeiten, was lediglich Kenntnisse des ersten Studienjahres erfordert. Nach einer Einführung in Differentialformen (auf dem $\mathbb{R}^n$ und dann auf Mannigfaltigkeiten), wird es um Integration auf Mannigfaltigkeiten gehen. Sodann werden wir uns mit dem Integralsatz von Stokes (Integration auf berandeten Mannigfaltigkeiten) in der Formulierung mit Differentialformen befassen, ebenso wie dem Satz von Poincaré. Für Flächen werden wir uns mit dem Satz wichtigen Satz von Gauß und Bonnet beschäftigen und Elemente der Morse-Thoerie kennen lernen.
Bitte bei Interesse in StudIP im Wiki für Vorträge anmelden.
Vorgesehene Zeit: Montag 16 Uhr (noch verhandelbar).

Literatur

[dC] M. do Carmo, Differential Forms and Applications, Springer, 1994

19 Proseminar: Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Dozent/Art/Credits: Bahns – Proseminar – 3C

Zielgruppe: 3. Studienjahr BSc

Vorkenntnisse: Algebra von Vorteil

Vorbesprechung: 15. Sept., 9 Uhr

Beschreibung

Wir werden den Klassiker von J.P. Serre zugrunde legen. Nach den grundlegenden Vorträgen (bis Vortrag 9) können wir bei Interesse alternativ zur abstrakten Ringtheorie etc. in [S] auch Anwendungen endlicher Gruppen in der Physik studieren (Sh. Sternberg und Conway folgend).
Bitte bei Interesse in StudIP im Wiki für Vorträge anmelden.
Vorgesehene Zeit: Montag 14 Uhr (noch verhandelbar).

Literatur

S J.-P. Serre, Lineare Darstellungstheorie endlicher Gruppen, Akademie Verlag, 1972

- Eventuell: Shlomo Sternberg, Group Theory and Physics, Cambridge University press, 1994

  und J.F. Cornwell, Group Theory in Physics, Academic Press 1994.

20 Seminar: Elliptic Curves

Dozent/Art/Credits: Evelina Viada – Seminar – 3C

time slot: Thuesday, 12.15 – 13.45

target group/language: Bachelor and Master students of mathematics/english

contact: evelina.viada@mathematik.uni-goettingen.de.

The aim of the seminar is to understand Elliptic Curves from several points of view. We will first discuss some important tools of Diophantine Geometry, such as Bézout's Theorem, Resultants, Heights. We will then investigate Elliptic Curves from an algebraic and a geometric point of view. At the end of the seminar, the students should be able to understand the proofs of the Nagel-Lutz and Mordell-Weil Theorems.
The talks are of different levels and some are independent of the others. Students can take part to the seminar from the 5. Semester on, however a good mastering of Number Theory, Algebra and a basic knowledge of Galois theory and geometry are mandatory. In the presentation, the student must show to be able to apply the theory in specific examples and exercises.
Each student chooses a subject from the given list or proposes a subject that must be first approved by the Professor.

Give a Talk

The talk must be well organised and last about 60-70 minutes. The aim of the talk is to make other students understand and learn some mathematics. Therefore it must be accessible to a master student. More than on complicated proofs it has to be focused on examples and applications. Questions can be posed during and after the talk. The student should be able to answer questions on the subject.

Deadlines and Credit Points

All deadlines fixed in the official schedule are mandatory and cannot be postponed. To obtain credit points, the talk and answers to questions must get a sufficient grade.

Literatur

[1] M. Hindry and J. Silverman, Diophantine Geometry an introduction, Springer-Verlag, New York 2000

[2] R.P. Hulst, A proof of Bésout's theorem usig the Euclidean algorithm, Bachelor Thesis 2011, Universiteit Leiden. https://www.universiteitleiden.nl/binaries/content/assets/science/mi/scripties/bachelor/-2016/110830_btheses_hulst_fwn_math.pdf

[3] A. W. Knapp: Elliptic Curves. Princeton Univ. Press, Princeton, (1992).

[4] J. H. Silverman: The Arithmetic of Elliptic Curves. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1985).

[5] J. H. Silverman: Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1994).

[6] Andrew Sutherland, MIT Mathematics, Cours n. 18.783 Elliptic Curves, https://math.mit.edu/classes/18.783/2017/lectures.html

[7] P. Stevenhagen, Elliptic Functions, Universiteit van Amsterdam, 1991-92 https://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/ellipticfunctions.pdf

[8] P. Stevenhagen and B. de Smit, Kervank Algebra, Universteit van Amsterdam, 1996-97 https://vdoc.pub/documents/elliptic-curves-kernvak-algebra-l6bp6nr96p00

21 Seminar: Topics in functional analysis

Dozent/Art/Credits: Christopher Wulff – Seminar – 3C

time slot: To be determined

target group/language: Bachelor and Master students of mathematics

prerequisites: A standard lecture on functional analysis.

Preliminary meeting: A very small preliminary meeting had already taken place, but there are still a lot of talks available. Send me an email if you are interested in participating: christopher.wulff@mathematik.uni-goettingen.de.

Full announcement with plan of talks:
`https://www.uni-math.gwdg.de/cwulff/SeminarTopicsinFunctionalAnalysis_WS22.pdf`

The objective of the seminar is to learn several topics which normally don't fit into a standard lecture course on functional analysis. In particular they haven't been discussed in the summer semester 2022. As a guiding theme we ask ourselves the question:

How to differentiate non-differentiable functions?

Specifically, we will cover Sobolev spaces, fourier transform, locally convex spaces and, as crowning culmination, distributions.

Literatur

[1] *D. Werner*, Funktionalanalysis. 8th revised edition. Berlin: Springer Spektrum (2018), `https://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/XMLPRS=N/PPN?PPN=1018141219`

[2] *G. Grubb*, Distributions and operators. New York, NY: Springer (2009)

22 Seminar: Complex geometry and Hodge theory

Dozent/Art/Credits: Frank Gounelas – Seminar – 3 C

Vorleistung/Prüfung: Presentation

Termin: NN

Zusätzlich:

Zielgruppe/Sprache: Advanced Bachelor/Master students / English

Vorkenntnisse: Algebraic Geometry I/II from 2021/2022, a differential geometry course or a course in algebraic topology.

Description

We will cover some of the analytic aspects of algebraic geometry, in particular following Huybrechts' book [1]. Some topics to be covered will be:

1. Complex analysis of manifolds.
2. The analytic topology on a smooth projective variety and Kähler manifolds.
3. Differential forms.
4. Betti and de Rham cohomology.
5. Hodge theory, in particular the Hodge decomposition theorem.
6. The Picard group, vector bundles and some basic theory of Chern classes.

Literatur

[1] *D. Huybrechts*, Complex Geometry: An Introduction. Springer.

[2] *D. Arapura*, Algebraic Geometry over the Complex Numbers. Springer.

[3] *C. Voisin*, Hodge Theory and Complex algebraic Geometry I/II. CUP.

23 Seminar: Morse theory

Dozent/Art/Credits: Thomas Schick – Seminar – 3 C

Vorleistung/Prüfung: Presentation and Handout

Termin: Tue 14-16 (can still be adjusted)

Zielgruppe/Sprache: Advanced Bachelor students/Master students / English

Vorkenntnisse: Diff 3 (Analysis on manifolds). Having seen some aspects of algebraic topology doesn't hurt, but will not be required for the course

Description

We will analyze the topology of manifolds using height functions (called Morse functions) and their critical points. This allowed (way before the theory was developped) the Hilbert's doctoral student Boy the construction of the Boy surface, an immersion of the projective plane in $\mathbb{R}^3$. It also gives an efficient detection principle for manifolds homeomorphic to the sphere which is the basis of Smale's proof of the high dimensional Poincaré conjecture. The theory can even be extended to infinite dimensional manifolds. As applications, one can prove the existence of infinitely many geodesics between any two points on a large variety of manifolds, and also the famous Bott periodicity theorem about the homotpy groups of the unitary groups $U(n)$ for large n.
We will start with some basics of the theory of differential equations (vector fields and their flows) on manifolds. Then we will introduce the basics of Morse theory (what does a critical point or its absence tell about the topology of a manifold). We will also prove the existence of Morse functions. The later talks are dedicated to a choice of applications as indicated above. One of the talks could discuss the classic article of Boy (which is written in German).
For more details see the description in stud.ip and on Thomas Schick's homepage.

Literatur

[1] *John Milnor*, Morse theory. (Main reference)

[2] *Werner Boy*, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Math. Ann. 57(1903), 151-184.

[3] *John Lee* Introduction to smooth manifolds (chapter 12 “Integral curves and flows”)

24 Seminar: Arithmetic statistic

Dozent/Art/Credits: Victoria Cantoral – Seminar – 3 C

Vorleistung/Prüfung: Presentation and Handout

Termin: NN

Zielgruppe/Sprache: Advanced Bachelor/Master students / English

Vorkenntnisse: Algebraic number theory and Algebraic Geometry I/II from 2021/2022.

Description

Consider an elliptic curve E defined over the rational numbers given by its minimal Weierstrass equation $E : y^2 = x^3 + ax + b$. Let p be a prime number not dividing the discriminant of the elliptic curve. Let us define the following quantity

$$N_E(P) := |E(\mathbb{F}_p)|.$$

In 1933 Hasse proved Artin's conjecture which asserts that $|N_E(p) - p| \leq 2\sqrt{p}$.

Question 24.1. *What is the distribution of* $\frac{N_E(p)-p}{\sqrt{p}}$ *in the interval* $[-2, 2]$ *when* $p \to \infty$*, is it equidistributed?*

The former has fascinated several mathematicians and laid the ground for the famous Sato–Tate conjecture. This conjecture is closely related to the famous Riemann hypothesis. It predicts the distribution of the zeros of the Riemann zêta function. More precisely, it asserts that for any elliptic curve without complex multiplication, defined over a number field K, the traces of the Frobenius are equidistributed. This conjecture is still open and only a few cases are known.
The first aim of this seminar is to introduce the Sato–Tate conjecture and give an overview of the known results. Subsequently, we will study several generalizations of this conjecture. For instance, one could generalize this conjecture to higher-dimension abelian varieties, $K3$ surfaces, and pure motives of odd weight.
For further details see the description in Stud.IP and feel free to contact me if you would like to give a talk.

Literatur

[1] *Equidistributions, L-Functions, and Sato–Tate Groups*, Contemporary Mathematics, 649 (2015).

[2] *Abelian ℓ-adic representation and elliptic curves*, Advanced book classics (1968).

[3] *Lectures on $N_X(p)$*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics (2012).

25 Seminar: Die Sätze von Banach-Tarski und von Tarski

Dozent/Art/Credits: Sebastian Bauer – Seminar – 5 C

Vorleistung/Prüfung: Präsentation und Ausarbeitung

Termin: NN

Zielgruppe/Sprache: Master Lehramt / Deutsch

Vorkenntnisse: Lehramt-Bachelor Mathematik

Anrechenbarkeit: M.Mat.0045: Seminar zum forschenden Lernen

Beschreibung

Das Paradoxon von Banach und Tarski zählt sicherlich zu einem der spektakulärsten Resultaten der Mathematik: Es ist möglich eine Kugel in endlich viele Teile zu zerlegen (fünf reichen) und diese wieder so zusammenzusetzen, dass zwei Kugeln mit dem selben Radius entstehen. Oder noch spektkuärer: Man kann eine Erbse in endlich viele Teile zerlegen und diese so zusammen setzen, dass eine Kugel von der Größe der Sonne entsteht.
In diesem Seminar soll behandelt werden, vor welchem geschichtlichen Hintergrund diese Resultate entstanden sind (es ging um die Frage nach der Existenz von endlich additiven Maßen auf beliebigen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$), wie sich diese paradoxen Zerlegungen konstruieren lassen und warum es solche Paradoxien im $\mathbb{R}^2$ nicht geben kann. Grundlage des Seminars ist das Buch von Stan Wagon und Grzegorz Tomkowicz, [1].

Literatur

[1] *S. Wagon & G. Tomkowicz*, The Banach-Tarski Paradox. 2nd edition. New York: Cambridge University Press (2016), `https://zbmath.org/?q=an:1372.43001`

26 Seminar: Sofic Groups

Dozent/Art/Credits: Engelbert Suchla – Seminar – 5 C

Vorleistung/Prüfung: Presentation and Handout

Termin: to be determined

Zielgruppe/Sprache: Bachelor & Master Mathematik (PhD students are also welcome) / Englisch

Vorkenntnisse: Algebra. Additionally, Functional Analysis would be helpful for some talks

Module: B.Mat.3424 Seminar im Zyklus "Gruppen, Geometrie und Dynamische Systeme"
M.Mat.4824 Seminar on groups, geometry and dynamical systems
B.Mat.3423 Seminar im Zyklus "Algebraische Strukturen"
M.Mat.4823 Seminar on algebraic structures

Beschreibung

Groups are used everywhere in mathematics, and their shapes and properties vary so much that Abel prize laureate Mikhael Gromov famously claimed: "A statement that holds for all finitely generated groups has to be either trivial or wrong." However, there might be an exception:
The property of *soficity* (ironically also invented by Gromov) is highly non-trivial, undeniably useful, and applies to a huge amount of groups – in fact, we don't know if non-sofic groups exist at all!
In this seminar, we will learn what soficity of a group actually means, show that large classes of groups indeed share this property, and see how several big conjectures about groups can be proven for all sofic groups. Finally, we will talk about some candidates for a non-sofic group.
As a preparation, we will discuss the concept of *ultrafilters*: a generalized idea of convergence that allows us to assign a well-behaved limit to many divergent sequences.

Reference

Valerio Capraro & Martino Lupini, *Introduction to Sofic and Hyperlinear Groups and Connes' Embedding Conjecture*, Springer 2015,
preprint freely available at *https://arxiv.org/abs/1309.2034*

27 Oberseminare

- Higher Structure seminar (Chenchang Zhu, Wed. 14-16), we talk about higher categorical structures mostly in diff. geometry, but also in other areas. Math physics is a source of such structures.

- Oberseminar on algebraic geometry – Gounelas – This seminar is mainly an opportunity for students writing a Bachelor's or Master's thesis or dissertation under my supervision to speak about their results or articles that they are reading right now.

- Oberseminar: Geometry and Topology (Thomas Schick, Tue 16-18). We will discuss our own research (progress of bachelor, master and PhD thesis, random other research projects). A larger part of the seminar is also reserved for guests speakers on various topics which interest (some) of us.

- Oberseminar: Arithmetic Geometry – Viada – Tuesday TBA

- Oberseminar on analysis of partial differential equations – Witt – Fri, ??-??

  We will continue to study wave propagation on curved spacetimes. We are particularly interested in the behavior of waves at spatial or temporal infinity. The ultimate goal is to read (and understand) the article "Stability of Minkowski space and polyhomogeneity of the metric" by Peter Hintz and Andras Vasy, Annals of PDE, 6 (2020). To prepare the reading of this article, in the previous semester we have already started to discuss the following topics:

  1. Linear waves on curved spacetimes, radiation fields,

  2. Differential-geometric background of general relativity,

  3. Singular analysis à la Melrose, compactifications, blow-ups,

  the material for this taken from various sources. Please contact me if you are interested in details.

28 Mathematische Gesellschaft und weitere Termine

Mathematische Gesellschaft

- Termin: Donnerstags 16 Uhr – ab 15:45 Kaffee, Tee und Kekse im Schlauch

- Übersicht der Vorträge jeweils aktuell unter:
  `https://www.uni-goettingen.de/de/207450.html`