Vorlesungskommentar – Wintersemester 24/25 – Wird ständig aktualisiert

Mathematisches Institut, Institut für Mathematische Stochastik,
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Georg-August-Universität Göttingen

20. Oktober 2024

Einleitung

Der Kommentar gibt einen Überblick über die Veranstaltungen des Mathematischen Instituts (MI), des Instituts fuer Mathematische Sochastik (IMS) und des Instituts für numerische und angewandet Mathematik (NAM) im Wintersemester 24/25. Änderungen sind noch möglich und werden zeitnah eingepflegt. Bitte im Zweifelsfall die Daten aus **Stud.IP**, **Exa** und den ganzen Ordnungen (`https://www.math.uni-goettingen.de/service/ordnungen.html`) beachten oder auch einfach beim entsprechenden Lehrpersonal nachfragen. Die Vorlesungen *Lehramt* richten sich an die Studierenden im Lehramt, 2FB und WiPäd.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mathematisches Institut (MI)

1.1 Grundvorlesungen

1.1.1 Vorlesung: Differenzial- und Integralrechnung I

Dozent/Art: Damaris Schindler / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Oscar Cosserat

Zielgruppe/Sprache: 1. Semester / deutsch

Vorkenntnisse: Teilnahme am Mathematischen Propedeutikum erwünscht.

Beschreibung

Dies ist ein erster Kurs in Analysis, in dem wir Themen wie Folgen, Reihen, Grenzwerte, Differenzierbarkeit von Funktionen und Integralrechnung besprechen werden. Ein weiteres Ziel des Kurses ist es, mathematisches Arbeiten und Problemloesen zu erlernen und zu vertiefen.

Literatur

- Koenigsberger, Analysis 1

1.1.2 Vorlesung: Analytische Geometrie und Lineare Algebra I

Dozent/Art: Jörg Brüdern / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Leo Schäfer

Zielgruppe/Sprache: 1. Semester / deutsch

Vorkenntnisse: Teilnahme am Mathematischen Propedeutikum erwünscht.

Beschreibung

Eine der beiden Standardvorlesungen für Studienanfänger, wie es sie fast überall in Deutschland gibt. Die Inhalte werden in fast allen weiterführenden Veranstaltungen gebraucht, insbesondere in Teil 2 der Diff- und Intrechnung.

Literatur

- G. Fischer, Lineare Algebra. Es gibt aber eine Vielzahl weiterer guter (und nicht ganz so guter) Bücher.

1.1.3 Grundzüge der Algebra und funktionale Zusammenhänge

Dozent/Art: Stefan Halverscheid / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Stefan Wiedmann

Zielgruppe/Sprache: 1. Semester Lehramt / deutsch

Vorkenntnisse: Teilnahme am Mathematischen Propedeutikum erwünscht.

Beschreibung

Algebra und Funktionen stellen zentrale Bausteine für die mathematische Sprache dar. Es geht in der Veranstaltung darum, die Inhalte der Algebra und Funktionen aus dem Schulbereich genauer zu verstehen und im Handwerkszeug der Algebra und Funktionen fit zu werden. Ziel ist, sowohl für das weitere Studium als auch für den Schulunterricht eine solide Basis zu erarbeiten.
In der Veranstaltung werden diese Methoden zunächst entlang des Zahlaufbaus entwickelt, indem typische algebraische Operationen und Beweise für die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen und schließlich die reellen und komplexen Zahlen aufgebaut und geübt werden.
Im zweiten Teil werden Polynome eine zentrale Rolle spielen - sowohl von der algebraischen Seite als auch von den Funktionen her, die sie definieren.
Schließlich geht es im dritten Teil um die klassischen Funktionen (Exponential- und Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen) und ihre Eigenschaften.

Literatur

- Oberschelp, A. (1972). Aufbau des Zahlensystems. Vandenhoeck & Ruprecht.

1.2 Serviceveranstaltungen

1.2.1 Mathematische Grundlagen in Biologie und Molekularmedizin

Dozent/Art: Stefan Wiedmann / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Cipriana Anghel-Stan

Zielgruppe/Sprache: Studierende der Biologie und Molekularmedizin im 1. Semester.

Vorkenntnisse: Teilnahme am mathematischen Vorkurs für diese Fächer wünschenswert.

Beschreibung

Wir behandeln grundlegende Themen der Analysis und der linearen Algebra. Soweit die Zeit reicht werden zum Abschluss Themen der Dynamik behandelt (Populationsdynamik, Zerfalls- und Wachstumsprozesse).

Literatur

- Ina Kersten, *Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften*, Universitätsdrucke Göttingen.

1.2.2 Mathematik für Studierende der Physik I

Dozent/Art: Dorothea Bahns

Assistenz: Roberta Iseppi, Simon-Raphael Fischer

Zielgruppe/Sprache: Studierende der Physik im 1. Semester

Vorkenntnisse: Teilnahme am Mathematischen Propedeutikum erwünscht.

Beschreibung

Literatur

-

1.2.3 Mathematik für Studierende der Physik III

Dozent/Art: Dorothea Bahns

Assistenz: Christian Jäh

Zielgruppe/Sprache: Studierende der Physik im 3. Semester

Vorkenntnisse: MaPhy I und II

Beschreibung

Literatur

-

1.2.4 Diskrete Mathematik für Studierende der Informatik

Dozent/Art: Evelina Viada

Assistenz: Rok Havlas

Zielgruppe/Sprache: Studierende der Informatik

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Diese Vorlesung richtet sich an Studierende der Informatik und gibt einen Überblick über die wichtigsten Bereiche der diskreten Mathematik. Alle Themen werden eingeführt, ohne dass dabei tieferes mathematisches Vorwissen vorausgesetzt ist. Die Übungen sind Pflicht und sind notwendig, um die Inhalte zu verstehen. Die behandelten Themen sind:

- Grundlagen der Mathematik und Logik,
- Natürliche Zahlen und vollständige Induktion,
- Elementare Zahlentheorie,
- Elementare Kombinatorik,
- Graphentheorie,
- Restklassenringe und das RSA-Verschlüsselungsverfahren,
- Algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe und Körper) (Falls Zeit)

Literatur

[1] L. Pottmeyer, Diskrete Mathematik: Ein kompakter Einstieg, Springer Spektrum, 2019
[2] M. Aigner, Diskrete Mathematik, 5th ed., Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2004.
[3] J. Matoušek and J. Nešetřil, Diskrete Mathematik: Eine Entdeckungsreise, 2nd ed., Springer, 2007.
[4] A. Steger, Diskrete Strukturen, Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra, 2nd ed., Springer, 2007.
[5] G. Teschl and S. Teschl, Mathematik für Informatiker, Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra, 4th ed., Springer, 2013.

1.3 Weiterführende Vorlesungen

1.3.1 Differenzial- und Integralrechnung III

Dozent/Art: Victor Pidstrygach / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Cipriana Anghel-Stan

Zielgruppe/Sprache: ab 3. Semester / deutsch

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen

Beschreibung

Die folgenden Themen werden behandelt:

1. Vektorfelder und deren Integralkurven und Flüsse. Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

2. Differentialformen; deren Eigenschaften und Rechenregeln. Hierfür werden Mannigfaltigkeiten, insbesondere solche mit Rand, eingeführt. Ziel ist der Satz von Stokes.

Literatur

-

1.3.2 Algebra

Dozent/Art: Florian Wilsch / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Mahya Mehrabdollahei, Anouk Greven

Zielgruppe/Sprache: ab 3. Semester / deutsch

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen

Beschreibung

In der modernen Mathematik versteht man unter abstrakter Algebra vor allem das Studium von algebraischen Strukturen, also Mengen mit einer oder mehreren Verknüpfungen, die verschiedene Axiome erfüllen müssen, und ihren strukturerhaltenden Abbildungen, genannt Homomorphismen. Solche Strukturen finden sich in vielen anderen Teilgebieten der Mathematik – wie Geometrie, Topologie und Zahlentheorie – wieder, in denen Methoden der Algebra deshalb Anwendung finden.
Während lineare Algebra – also die Theorie der Vektorräume und linearen Abbildungen – einen abstrakten Rahmen zur Untersuchung von linearen Gleichungssystemen bereitstellt, sind für die Gleichungen höheren Grades andere Strukturen nötig: Zum Ende der Vorlesung hin wird uns die Galoistheorie Einsichten in die algebraische Lösbarkeit von Polynomgleichungen geben.
In der Vorlesung werden wir uns vor allem mit drei algebraischen Strukturen tiefer beschäftigen: Gruppen, Ringen und Körpern.

Literatur

- S. Bosch. *Algebra*. Springer Spektrum, Berlin, 2020.

1.3.3 Introduction to analysis of partial differential equations

Dozent/Art: Ingo Witt / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Christian Jäh

Zielgruppe/Sprache: ab 5. Semester / englisch

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen

Beschreibung

This lecture course provides an introduction to the field of partial differential equations. More precisely, we will study analytic questions about properties of solutions to classes of linear and nonlinear partial differential equations. Specifically, we will be interested in the following topics:

- First-order partial differential equations and the method of characteristics,
- The Fourier transform, tempered distributions, and Sobolev spaces,
- Boundary value problems for elliptic partial differential equations, elliptic regularity,
- Dissipative evolution equations, applications to the heat and wave equations,
- Semilinear Schrödinger equations.

Literatur

- T. Cazenave and A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equation.* Oxford Lecture Ser. Math. Appl., vol. 13, Clarendon Press, New York, 1998.
- L. C. Evans, *Partial differential equations.* Grad. Stud. Math., vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- J. Rauch, *Partial differential equations.* Grad. Texts in Math., vol. 128, Springer, New York, 1991.
- M. Renardy and R. C. Rogers, *An introduction to partial differential equations.* Texts Appl. Math., vol. 13. Springer, New York, 2004.

1.3.4 Introduction to additive combinatorics

Dozent/Art/: Lilian Matthiesen / Vorlesung mit Übung

Zielgruppe/Sprache: ab 5. Semester / englisch

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Additive combinatorics is a young subject area at the interface of number theory, combinatorics and harmonic analysis, which studies structure in general finite subsets of additive groups or commutative rings. Tools for studying these problems originate from a variety of different areas such as probability, graph theory, algebraic geometry, ergodic theory, representation theory or harmonic analysis.
Many results and questions from additive combinatorics can be phrased in terms of finite subsets of the integers. To state a few examples, let $N > 0$ be a (large) integer, let $A \subset \{1, \ldots, N\}$ denote a subset of the positive integers up to N and let $\alpha = |A|/N$ denote its density.
As a first example of 'structure', we consider the existence of a non-trivial arithmetic progression of length three inside A, i.e. the existence of three elements of the form n, $n+d$ and $n+2d$, where $d > 0$. If $\alpha = 1$, then A contains all the integers up to N and therefore also contains many non-trivial arithmetic progression of length three. Concerning smaller values of α, one may ask: As a function of N, how large does α need to be (i.e. how dense does A need to be inside $\{1, \ldots, N\}$) in order for A to still be guaranteed to contain a non-trivial arithmetic progression of length three?
A different example concerns sum-sets: If we denote by $A + A = \{a + a' : a, a' \in A\}$ the set of integers that are sums of two elements from A, we may compare the cardinality of $A + A$ with that of A. Trivial bound are given by $|A| \leq |A + A| \leq |A|^2$. While we expect $|A + A|$ to be much larger than $|A|$ in general, there are simple examples of sets for which the ratio $|A + A|/|A|$ is small, i.e. bounded by a constant. This happens for instance if $A = \{a + kd : 0 \leq k \leq \ell\}$ is an arithmetic progression, in which case $|A| = \ell + 1$ and $|A + A| = 2\ell + 1 = 2|A| - 1$. The event in which $|A + A|/|A|$ is small is an extremal event and one might try to understand why this event occurs: Can we say something in general about the structure of sets A with small sum-sets? Are there other examples apart from arithmetic progressions?
Based on a selection of fundamental problems from this area, this course will serve as an introduction to additive combinatorics and its tool set.

Literatur

- T. Tao and V.H. Vu. *Additive Combinatorics.* Cambridge University Press, 2006.

1.3.5 Introduction to algebraic topology

Dozent/Art/: Georg Frenck / Vorlesung mit Übung

Zielgruppe/Sprache: ab 5. Semester / englisch

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen

Beschreibung

This lecture course will be an introduction to algebraic topology. After a brief Introduction to topological spaces containing, discussing the most important examples and properties we will study algebraic invariants of topological spaces. Specifically, we will have a look at the following topics:

- Properties of topological spaces, like compactness.
- CW-complexes and topological manifolds.
- The fundamental group and covering theory.
- Singular homology of topological spaces.
- Cellular homology of CW-complexes

Literatur

- *A. Hatcher*, Algebraic topology. Cambridge: Cambridge University Press (2002; Zbl 1044.55001)
- *T. tom Dieck*, Algebraic topology. Zürich: European Mathematical Society (EMS) (2008; Zbl 1156.55001)
- *W. Lück*, Algebraische Topologie. Homologie und Mannigfaltigkeiten. Wiesbaden: Vieweg (2005; Zbl 1062.55001)

1.3.6 Geometry of manifolds

Dozent/Art/: Victor Pidstrygach / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Greg Weiler

Zielgruppe/Sprache: Master / englisch

Vorkenntnisse: Diff 1-3, AGLA 1-2 , Groups and their action (from Algebra, Sem. 3)

Beschreibung

Lie groups and algebras. Left- (right-) invariant vector fields, trivialisations of the tangent bundle. Lie bracket, Lie algebra, exponential mapping, Ad and ad. Examples: (stabilisers of) metric, symplectic form, complex structure. Differential forms, forms with values in vector spaces. Representations of Lie groups.

Principal bundles. Frames in vector bundles. Principal bundles. Associated vector bundles, forms with values in vector bundles. Vertical subspace (distribution). Change of structure group. Special role of tangent frames.

Connections on principal bundles. Connection form. Horizontal subspace, horisontal lift. Local trivialisation and local connection forms. Covariant derivative. Parallel transport, holonomy. Affine structure on the space of connections and gauge group. Connections on vector bundles.

Differential geometry with principal bundles. Curvature, geometric meaning, measure of deviation from a complex, measure of deviation from a Lie algebra homomorphism for vector fileds. Bianchi identities.

Riemannian geometry with principal bundles. Canonical 1-form. Torsion. Levi-Civita connection. Riemannian geometry.

Complex and Kahler geometry.

Literatur

- *Bishop, R.L. ; Crittenden, R.J.*, Geometry of Manifolds. American Mathematical Society (2001; ISBN 9780821829233)
- *Salomon S.*, Riemannian geometry and holonomy groups . Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex, U.K. (1998; https://doi.org/10.1007/BF00049573)

1.3.7 Differential geometry III (Category theory III)

Dozent/Art/: Chenchang Zhu / Vorlesung

Assistenz: N.N.

Zielgruppe/Sprache: Master / english

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Literatur

-

1.3.8 Non-commutativ geometry III

Dozent/Art: Ralf Meyer / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Clément Cren

Zielgruppe/Sprache: Master / english

Vorkenntnisse: This lecture requires functional analysis, but not the lectures on harmonic analysis and C*-algebras. Some familiarity with the basicsof C*-algebra theory (not the full course) is used in some parts of the course.

Beschreibung

Keywords quantum mechanics background, some homotopy theory, classification of topological phases of physical systems through van Daele's K-theory, anti-unitary symmetries and Clifford algebras, van Daele K-theory classes for spheres

A recent discovery in quantum physics is that certain materials are insulators, in principle, but conduct electricity on the boundary of a finite chunk of them. Even more, this conductivity on the boundary is forced to be present by topological properties of the underlying physical system. These topological properties may be understood using C*-algebra K-theory. The course will begin with a crash course in quantum mechanics, to clarify how the mathematics that we are going to do may be applied to physical systems. Then we define topological phases through homotopy classes of Hamiltonians in a given C*-algebra that describes the physical system. Usually, this C*-algebra consists simply of matrix-valued functions on a torus. More complicated C*-algebras appear when one adds magnetic fields or disorder to the setup. The topological classification of Hamiltonians may be formulated using basic homotopy theory. This even allows for some computations, but I plan to focus on C*-algebra K-theory as a more powerful machinery to encode the relevant topological information.
There are different ways to introduce K-theory for Banach algebras or C*-algebras, and the approach most convenient for topological phases is not the one most commonly used by C*-algebraists. Many interesting topological materials have extra symmetries, and only show topological properties if the symmetries are taken into account. To describe these extra symmetries conveniently and in a way that interacts nicely with K-theory, we will use C*-algebras over the field of real numbers and equipped with a Z/2-grading, where van Daele has given a definition of K-theory that is very close to physical applications. Clifford algebras play a crucial role in the K-theory of real C*-algebras, and they may also be used to describe the various physical symmetry types.
This class also requires functional analysis, and it is relevant to know what a C*-algebra is. You should at least be ready to take a few facts about C*-algebras for granted. In this sense, you may succeed in this course without taking the earlier harmonic analysis or C*-algebras classes, if you are willing to spend a few days to learn the most basic things

about C*-algebras. You need some physics background to fully appreciate this course. I do give a short crash course in quantum mechanics, but this may not be enough if it is your first contact with it. The mathematics in this course may be considered interesting in its own right. In particular, this may be the only course about the rich subject of K-theory of C*-algebras in the near future. If there is a lot of interest by students with no physics background, I could split the course into two strands, one about K-theory for C*-algebras and one that is more about the physical applications. This may be difficult to do properly, however, so that I will only do this if there is sufficient interest in this option. So please write to me if you are interested in such an arrangement!

Alternative 2SWS reading course I have offered a 2SWS course on modelling topological phases in the past. This would still be available as a reading course upon request. That is, online materials are available that may suffice for you to learn this subject. My plan for the Winter 2024/5 course differs in that I use the more powerful machinery of C*-algebra K-theory instead of just basic homotopy theory. I usually would recommend this course. The smaller course, however, has the advantage of lighter prerequisites. If you prefer to take it instead of this more substantial course, please write me an email. If you have already taken the 2SWS reading course, it would still make sense to take this more substantial course in addition to that.

Literatur

-

1.3.9 Zur Mathematik im 19. Jhd.

Dozent/Art: Ulrich Stuhler / Vorlesung

Zielgruppe/Sprache: ab 3. Semester / deutsch

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen

Bemerkung: Diese Veranstaltung beinhaltet keine Leistungsnachweise oder eine Abschlussprüfung. Daher können auch keine Credits erworben werden. Beginn: 7.11.2024

Beschreibung

Dies ist keine Vorlesung zur Geschichte der Mathematik. Die Intention ist vielmehr folgende. Viele unserer sog. mittleren Vorlesungen, die man im Anschluss an die Grundvorlesungen hören kann, stammen in ihrer eigentlichen Substanz aus der Mathematik des 19.ten Jahrhunderts. Dies gilt etwa für die Algebra, die Funktionentheorie, vieles aus der Differentialgeometrie, die Theorie der Lieschen Gruppen und Algebren, die Invariantentheorie, die Theorie der kompakten Riemannschen Flächen bzw. äquivalent der projektiven algebraischen Kurven bzw. noch einmal äquivalent der Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über dem Körper der komplexen Zahlen. Auch die Grundbegriffe der Topologie wie etwa die Fundamentalgruppe und vieles andere wären zu nennen. Dabei werden durch den Schliff der vielen Jahrzehnte, die uns von der damaligen Zeit trennen, diese mathematischen Gegenstände unvermeidlicher Weise in den entsprechenden Vorlesungen in so durchgearbeiteter und geglätteter Form angeboten, dass es oft schwer ist, die ursprünglichen Motivationen noch zu erkennen. Hier etwas Ergänzung zu schaffen,ist Ziel dieser Vorlesung. Geplante Themen sind: Komplexe Zahlen,sog.Fundamentalsatz der Algebra,Höhere Zahlsysteme(Quaternionen,Oktaven)Grassmann und die lineare Algebra.Projektive Geometrie,Satz von Bezout,Allgemeine Gleichung n-ten Grades und Ausblick auf die Galois Theorie,Beginn der Gruppentheorie.Dann komplexe Analysis, analytische Fortsetzung nach Weierstraß, Riemannsche Flächen.Weiter Differentialgeometrie,Gaussche Krümmung und Landesvermessung von Niedersachsen, Riemanns Habilitationsvortrag.Sophus Lie ,Liesche Gruppen und Liesche Algebren.Der Ring der Gausschen Zahlen und die zugehörige Zahlentheorie.Kreisteilung.Davon ausgehende Fragen, Dedekind und Kronecker.

Literatur

Literaturhinweise werden gelegentlich im Verlauf der Vorlesung gegeben. Noch einmal (siehe oben): keine Credits, ab und an die eine oder andere passende Aufgabe.

1.4 Proseminare

1.4.1 Proseminar über Perlen der Mathematik A

Dozent/Art: Damaris Schindler / Seminar

Zielgruppe/Sprache: deutsch

Vorkenntnisse: AGLA I+II, Diff I+II

Beschreibung

Wir werden in diesem Seminar Themen aus dem 'Buch der Beweise' behandeln. Eine detaillierte Auflistung an Themen sowie mehr Informationen zu dem Seminar folgt in StudIP. Wer Interesse hat, einen Vortrag zu halten, kann sich sehr gerne schon ab jetzt bei mir per e-mail melden (die slots werden dann first come, first served vergeben).

Literatur

- Aigner und Ziegler, Das Buch der Beweise, Springer, 2. Auflage

1.4.2 Proseminar über Perlen der Mathmatik B

Dozent/Art: Simon-Raphael Fischer / Seminar

Zielgruppe/Sprache: Deutsch

Vorkenntnisse: Elementare Kenntnisse über Geometrie

Beschreibung

In diesem Seminar werden wir Kapitel aus dem Buch "Perlen der Mathematik" behandeln, die Themen werden "first come, first served" vergeben (gerne auch schon per Email, simon.fischer@mathematik.uni-goettingen.de). Weitere Informationen folgen auf StudIP.

Literatur

- Claudi Alsina & Roger B. Nelsen, Perlen der Mathematik, Springer

1.5 Seminare

1.5.1 Seminar on harmonic analysis on spaces of homogeneous type

Dozent/Art: Ingo Witt / Seminar

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse: Diff I-II, AGLA I-II. In addition, measure theory or functional analysis are helpful, but not strictly required.

Beschreibung

In Fourier analysis on Euclidean space $\mathbb{R}^N$, one investigates singular integral operators, i.e., linear operators T of the form

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

where u is a function on $\mathbb{R}^N$. The basic assumption on the integral kernel K is that

$$|K(x,y)| \lesssim |x-y|^{-N}, \quad x \neq y, \tag{1.2}$$

near the diagonal $\{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid x = y\}$. (The factual assumptions on K are a bit more delicate.) Mapping properties between L^p spaces, for $1 < p < \infty$, are of particular interest. As a matter of fact, singular integral operators **arise** surprisingly **often in applications**. It turns out that this theory has a generalization to spaces of homogeneous type, X. In the easiest case, such a space X is given by a quasi-distance d and Borel measure μ on X such that μ has the doubling property with respect to d, i.e., for open balls $B(x^0, r) = \{x \in X \mid d(x, x^0) < r\}$, it holds that

$$\mu(B(x^0, 2r)) \leq C\,\mu(B(x^0, r)), \quad x^0 \in X,\ r > 0,$$

for some constant C.
We will study this theory and also learn about applications. One of these applications will be concerned with problems in harmonic analysis on homogeneous (in particular, nilpotent) Lie groups.

Literatur

- D.-G. Deng and Y.-S. Han, *Harmonic analysis on spaces of homogeneous type*. Lecture Notes Math., vol. 1966, Springer, Berlin, 2009.
- J. Peyrière, *An introduction to singular integrals*. SIAM, Philadelphia, PA, 2018.
- E. M. Stein, *Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. Princeton Math. Ser., vol. 43, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

1.5.2 Seminar on Hilbert's 5th problem

Dozent/Art: Federico Vigolo

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse: Basic point-set topology, measure theory, and differential geometry (manifolds, tangent spaces...). Some knowledge of Lie groups, representatition theory, and functional analysis may be helpful (but is not necessary).

Beschreibung

In his influential collection of mathematical problem, Hilbert asked:

In wieweit ist der Liesche Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differenzirbarkeit der Funktionen unserer Untersuchung zugänglich? How far Lie's concept of continuous groups of transformations is approachable in our investigations without the assumption of the differentiability of the functions?

This question is in reference to the theory of Lie groups, which had only recently been developed. One modern interpretation of this problem asks whether a locally Euclidean topological group is necessarily isomorphic to a Lie group. Thanks to the work of Gleason, Montgomery–Zippin and Yamabe, this is now known to be true.

The goal of this seminar is to understand this proof, and then see how the ideas and techniques that have been developed in this process can be applied with great effect in other contexts as well, *e.g.* the classification of approximate subgroups and Gromov's Polynomial Growth Theorem.

Literatur

- *T. Tao*, Hilbert's fifth problem and related topics, AMS Graduate Studies in Mathematics, 153 (2014). `https://terrytao.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/03/hilbert-book.pdf`

1.5.3 Seminar on elliptic curves

Dozent/Art: Evelina Viada

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse: Students can take part to the seminar from the 5. Semester on, however a good mastering of number theory, algebra and a basic knowledge of Galois theory and algebraic geometry are mandatory. In the presentation, the student must show to be able to apply the theory in specific examples and exercises.

Beschreibung

The seminar intends to be an introduction to elliptic curves from different points of view. To this aim we will first introduce important tools of diophantine geometry, such as Bézout's Theorem, resultants, heights. We will discuss projective plane curves in general and then investigate elliptic curves and their properties. At the end of the seminar, the students should be able to understand the proofs of the Nagel-Lutz and Mordell-Weil Theorems. We will also have a short overview of applications of elliptic curves in cryptography.

Literatur

- C. G. Gibson, 1998. Elementary Geometry of Algebraic Curves: an Undergraduate Introduction. Cambridge University Press
- M. Hindry and J. Silverman, Diophantine Geometry an introdution, Springer-Verlag, New York 2000
- F. Kirwan, F. 1992. Complex Algebraic Curves. Cambridge University Press.
- A. W. Knapp: Elliptic Curves. Princeton Univ. Press, Princeton, (1992).
- J. H. Silverman: The Arithmetic of Elliptic Curves. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1985).
- J. H. Silverman: Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1994).
- Andrew Sutherland, MIT Mathematics, Cours n. 18.783 Elliptic Curves, https://math.mit.edu/classes/1
- P. Stevenhagen and B. de Smit, Kervank Algebra, Universteit van Amsterdam, 1996-97 https://vdoc.pub/documents/elliptic-curves-kernvak-algebra-l6bp6nr96p00

1.5.4 Number theory working seminar

Dozent/Art: Lilian Matthisen / Seminar

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Literatur

-

1.5.5 Seminar über mathematische Modellbildung

Dozent/Art: Ralf Meyer / Seminar

Zielgruppe/Sprache: Lehramt / deutsch

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Plan für das Seminar Mathematisches Modellieren im Wintersemester 2024/5 für Studierende im M.Edu.
Literatur ist vor allem
Bauer 2021: Mathematisches Modellieren als fachlicher Hintergrund für die Sekundarstufe I+II Brauer-Castillo-Chavez 2012: Mathematical models in population biology and epidemiology

1. Grundlegendes zum mathematischen Modellieren, am Beispiel eines hängenden Kabels (Bauer, §1.1, §2.2 Extrema unter Nebenbedingungen, explikative statt deskriptive Modellierung)

2. Was ist die „optimale“ Geschwindigkeit für den Verkehrsfluss (Bauer §2.1), dazu entweder weitere Literatur zu anderen Verkehrsmodellierungsfragen oder §1.2 Trassierungsaufgaben und der Begriff der Krümmung

3. Lineare Differenzengleichungen und ihre Lösungen, logistische Modelle, Linearisierung, Stabilität von Gleichgewichten und Zyklen, Modellierung von bestimmten Insektenpopulationen, Bekämpfung von Insekten, Modellparameter anpassen, (Bauer §4. Brauer-Castillo-Chavez §2.8)

4. Populationsmodelle mit Differenzialgleichungen, Qualitatives Verhalten der Lösungen, Trennung der Variablen und damit Existenz von Lösungen (Bauer §5.1–2, §5.5)

5. Fischfang, Jagdmodelle, (§5.3, Aufgaben)

6. Blutalkoholkonzentration: Beispiel einer Abituraufgabe, explikative versus deskriptive Modelle (§5.7)

7. Um- und zurückkippen von Seen, Hysterese, andere Beispiele für Hysterese, grafische Erklärung (Bauer Aufgabe 5.4. Brauer-Castillo-Chavez §1.6)?

8. Räuber-Beute-Modell 1: Lotka-Volterra, Existenz von Lösungen, Betrachtung empirischer Daten (Luchs und Schneehase) (§6.1–3)

9. Räuber-Beute-Modell 2: Ein komplexeres Modell, inklusive Modellbildung, Theorie: Linearisierungssatz Grobman und Hartman) (§6.4)

10. . Räuber-Beute-Modell 3: Ein weiteres Modell, inklusive Modellbildung, Theorie: Satz von Poincaré-Bendixson) (§6.5)

11.–12. Population von Tannenwickler und Balsamtanne, inklusive numerische Simulation und asymptotische Betrachtung (§5.4 und §7.3)

13. Das SIR-Modell für die Ausbreitung von Epidemien, Steuerung der Epidemieausbreitung, wie wirken Impfungen oder Kontaktbeschränkungen (Teile von Brauer-Castillo-Chavez §9)

14. Varianten des SIR-Modells: Endemische Krankheiten, Herdenimmunität (Teile von Brauer-Castillo-Chavez §10) Weitere mögliche Themen Verteilung bei mehreren Virusvarianten, Verteilung der Infektionen auf Altersgruppen oder räumliche Aspekte (kürzere Forschungsarbeiten)

Die Vorträge 1-8 sind bereits vergeben, die weiteren Vorträge sind aber noch zu haben. Bitte schreiben Sie mir bei Interesse gerne eine Email. Und diejenigen, die einzelne Vorträge ausgewählt haben, schreiben mir bitte, wenn Sie im August oder September schon ein Vorbereitungstreffen möchten. Bitte berücksichtigen Sie dabei, dass ich im Oktober in den Herbstferien, sprich vom 3. Oktober bis Semesterbeginn, verreist sein werde.
Vorträge 13-14 und 11-12 könnten aus inhaltlicher Sicht auch etwas früher im Semester stattfinden, wenn das für die jeweiligen Vortragenden wichtig wäre, weil sie nicht auf den fortgeschritteneren Theorieaspekten aufbauen müssen, die in den Kapiteln 8-10 entwickelt werden. Sie sollten aber als Zweierblöcke zusammenbleiben.
Außerdem möchte ich hier einen Ansatz für zukünftige Lehrangebote vorstellen, den ich sehr interessant finde, wozu ich aber noch kein konkretes Lehrangebot erstellt habe.
Preis der KMathF für Aktivitätserkennung auf dem Smartphone—Entwicklung von Unterrichtsmaterial für computergestützte mathematische Modellierungsprojekte
Jedes Jahr vergibt die Konferenz mathematischer Fachbereiche einen Preis für die beste mathematische Abschlussarbeit für Lehramtsstudierende. Dieses Jahr wird Katja Hoeffer ausgezeichnet. Sie hat in ihrer Abschlussarbeit am KIT beeindruckendes Unterrichtsmaterial mitentwickelt, mit dem die Mathematik auf reale Situationen angewandt wird. Im Rahmen eines Schulprojekts wird untersucht, wie ein Smartphone die Aktivitäten der Nutzer klassifizeren kann. Die Materialien in Form eines Jupyter Notebooks, auch mit Extrainformationen für Lehrende, findet man unter `https://workshops.cammp.online/`
Ich finde das einen spannenden Ansatz. Ich fände es schön, wenn Lehrer solche Jupyter Notebooks in ihrem Unterricht einsetzen können, insofern sollten wir das eigentlich auch irgendwie im Lehramtsstudium unterrichten. Ob das schon ausreichend passiert, weiss ich nicht. Wenn Sie finden, dass es hier einen Bedarf gibt, schreiben Sie mich gerne an.
Jetzt folgt die allgemein gehaltene Seminarankündigung hierfür.
Im Schulunterricht wird seit einiger Zeit mehr Wert auf darauf gelegt, Mathematik auf die Wirklichkeit anzuwenden. Eine mathematische Modellierung ist jedoch ein komplexer Prozess mit mehreren Schritten, die ineinander greifen. Einzelne Teile dieses Prozesses für sich liefern kaum einen Erkenntnisgewinn. Insbesondere bringen die mathematischen

Handlungen, losgelöst von der mathematischen Modellierung, kaum Einblick in das Anwendungsproblem. Viel kritisiert werden daher Pseudoanwendungen, die weder zum Verständnis der Wirklichkeit noch zum mathematischen Verständnis etwas beitragen. In diesem Seminar soll der Prozess der mathematischen Modellierung daher als Ganzes betrachtet und an einer Reihe von Beispielen eingeübt werden. Daneben bietet das Seminar auch die Gelegenheit, wichtige Konzepte aus der Differenzial- und Integralrechnung zu vertiefen. Oft möchte man qualitative Aussagen über das Verhalten der mathematischen Modelle herleiten und verwendet dabei oft mehr oder weniger tiefliegende mathematische Sätze.
Es gibt interessante mathematische Modellierungsprobleme in den verschiedensten Bereichen, ob Physik, Biologie, Verkehrsplanung oder die Preisfindung in der Wirtschaft. In diesem Seminar werde ich mich auf biologische Probleme konzentrieren. Eine Rechtfertigung hierfür ist der Wunsch, mit dem Seminar auch einen kleinen Beitrag zum Nachhaltigkeitsziel der Biodiversität zu leisten. Einige überraschende Vorgänge in komplexen Ökosystemen lassen sich auch schon in einfachen mathematischen Modellen beobachten. Mit Hilfe dieser Modelle kann man die Vorgänge in Ökosystemen daher besser verstehen und erklären. Ein typisches Beispiel hierfür ist das Umkippen von Gewässern. Wird zu viel Phosphat in ein Gewässer eingeleitet, so kippt es um in einen lebensfeindlichen Zustand. Danach erholt es sich erst wieder, wenn die Phosphateinleitung unter eine andere Schwelle gesenkt wird, die deutlich niedriger ist als die Schwelle, ab der das Gewässer umkippt.
Die Wirklichkeit ist so komplex, dass „exakte“ mathematische Modelle weder möglich noch nützlich sind. Denn je genauer ein Modell, desto mehr Parameter braucht es für die Beschreibung. All diese Parameter müssen aus den vorhandenen Daten geschätzt werden, aber die Auswirkungen dieser Schätzungen auf die Vorhersagen des Modells werden mit der Komplexität des Modells immer undurchsichtiger. Für bestimmte Probleme wie zum Beispiel die Wettervorhersage braucht es natürlich sehr komplexe Modelle. Wir werden uns im Seminar allerdings auf einfachere Modelle beschränken, deren Ziel das Verständnis naturwissenschaftlicher Phänomene ist. Solche Modelle enthalten eigentlich immer vereinfachende Annahmen, die offensichtlich falsch sind. Zum Beispiel werden Populationsgrößen in vielen Modellen als reelle Zahlen angesehen, die bestimmten Differenzialgleichungen genügen sollen – obwohl Populationsgrößen offensichtlich ganzzahlig sind. Darum verdient auch die Übersetzung von der Wirklichkeit zum Mathematischen Modell und zurück besondere Beachtung. Diese Schritte sind auch konzeptionell schwieriger als die Lösung der mathematischen Probleme, die ein Modell stellt, weil sie sowohl mathematisches als auch fachwissenschaftliches Verständnis benötigen.
Die mathematische Modellierung bietet auch die Gelegenheit, unter Computereinsatz mit Daten zu experimentieren. Man kann das mathematische Modell programmieren und danach ausprobieren, wie es sich verhält, wenn man Anfangswerte und Parameter verändert. Solche Simulationen sind eine verbreitete Methode in den Naturwissenschaften, so dass es sich lohnt, wenn dies auch im Mathematikunterricht in der Schule vorkommt. Deutlich schwieriger ist es, Modelle auch quantitativ auf reale Daten anzuwenden. Dabei müssen Parameter geschätzt, dann Vorhersagen gemacht und mit der Wirklichkeit verglichen werden. Hierbei sind jedoch verschiedene Aspekte schwierig, so dass ich in diesem Seminar darauf verzichten werde. Auf die computergestützte Modellierung möchte ich jedoch nicht verzichten. In den

Vorträgen des Seminars sollten daher die folgenden diversen Aspekte jeweils vorkommen, jedoch in unterschiedlicher Gewichtung:
Übersetzen von wirklichen Problemstellungen in mathematische, und Motivation der dabei auftretenden systematischen Modellierungsfehler; Mathematische Sätze beweisen; Qualitative Aussagen über spezifische Modelle herleiten und ihre Anwendung auf die Wirklichkeit diskutieren; Computerexperimente mit den mathematischen Modellen, Parameter variieren und qualitative Aussagen durch Computerexperimente überprüfen.
Der Computereinsatz ist auch deshalb für den Einsatz der Modellierung in Schulen wesentlich, weil er es erlaubt, die in der mathematischen Biologie verbreiteten Modelle mit Differenzialgleichungen durch Modelle mit Differenzengleichungen zu ersetzen. Letztere setzen keine Differenzialrechnung voraus, so dass ihr Einsatz im Unterricht nicht auf die Oberstufe beschränkt bleibt. Sie sind auch gerade in der Biologie sogar dichter an der Wirklichkeit, weil viele modellierte Größen von Natur aus diskret und nicht kontinuierlich sind.
Gemeinsam mit Sebastian Bauer habe ich ein ähnliches Seminar im Sommer 2022 angeboten. Sein Buch „Mathematisches Modellieren als fachlicher Hintergrund für die Sekundarstufe I+II“ ist auch die Hauptquelle für dieses Seminar. Eine wichtige Veränderung gegenüber dem damaligen Durchlauf betrifft Experimente mit echten Daten: Hierauf verzichte ich diesmal. So wie im damaligen Durchlauf erscheint es mir sinnvoll, nicht einzelne Vorträge zu vergeben, sondern einzelne Themenblöcke an Gruppen von 2–4 Studierende zu vergeben, die diese Themen dann gemeinsam präsentieren. Ein Themenbereich, der im Lehrbuch von Bauer nicht vorkommt, ist die Epidemiemodellierung. Diese wurde aus Anlass der Covid-Pandemie in den letzten Jahren intensiv beforscht, und es erscheint mir weiterhin lohnend, Epidemiemodelle als Themenblock zu betrachten. Hierbei sollen die klassischen Modelle zusammen mit neueren Modellen betrachtet werden, die bestimmte Aspekte der Covid-Pandemie erhellen sollen.

Literatur

- Bauer 2021: Mathematisches Modellieren als fachlicher Hintergrund für die Sekundarstufe I+II Brauer-Castillo-Chavez 2012: Mathematical models in population biology and epidemiology

1.5.6 Seminar on Fractal Geometry

Dozent/Art: Engelbert Suchla / Seminar

Zielgruppe/Sprache: Bachelor & Master students / English

Vorkenntnisse: Basics of measure theory

Termin: Tuesdays, 14:15–15:45

Beschreibung

Fractals are objects with non-integer dimension. In mathematics, they first appeared as strange counterexamples (*Weierstrass' function*, which is everywhere continuous but nowhere differentiable), then as geometric curiosities (like *Sierpiński's triangle*), and finally as the inevitable output of dynamical systems (most famously, the *Mandelbrot set*). Nowadays, fractals have connections to countless mathematical fields, from group theory all the way to number theory.
However, fractals are not just a mathematical curiosity: They describe phenomena ranging from the shape of plants to the movement of stock markets, from fluid dynamics to image compression. And, of course, they are the perfect illustration of how mathematics can produce true works of art!
In this seminar, we will begin by discussing how to define and compute fractal dimensions. Then, we will explore many different examples of fractals arising from various areas of mathematics and physics.

Literatur

Kenneth Falconer: *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications (Third Edition).* Wiley, 2014

Vorbesprechung

Monday, 7 October 2024, 14:15 – 15:45 h, Sitzungszimmer.

1.5.7 Seminar on Arithmetic Statistics

Dozent/Art: PD Dr. Victoria Cantoral / Seminar

Zielgruppe/Sprache: Bachelor & Master students / English

Vorkenntnisse: Algebraic Number Theory

Termin: Tuesdays, 18:15–19:45 HS 4

Beschreibung

Consider an elliptic curve E defined over the rational numbers given by its minimal Weierstrass equation $E : y^2 = x^3 + ax + b$. Let p be a prime number not dividing the discriminant of the elliptic curve. Let us define the following quantity

$$N_E(P) := |E(\mathbb{F}_p)|.$$

In 1933 Hasse proved Artin's conjecture which asserts that $|N_E(p) - p| \leq 2\sqrt{p}$.

What is the distribution of $\frac{N_E(p)-p}{\sqrt{p}}$ *in the interval* $[-2, 2]$ *when* $p \to \infty$*, is it equidistributed?*

The former has fascinated several mathematicians and laid the ground for the famous Sato–Tate conjecture. This conjecture is closely related to the famous Riemann hypothesis. It predicts the distribution of the zeros of the Riemann zêta function. More precisely, it asserts that for any elliptic curve without complex multiplication, defined over a number field K, the traces of the Frobenius are equidistributed. This conjecture is still open and only a few cases are known.
The first aim of this seminar is to introduce the Sato–Tate conjecture and give an overview of the known results. Subsequently, we will study several generalizations of this conjecture. For instance, one could generalize this conjecture to higher-dimension abelian varieties, $K3$ surfaces, and pure motives of odd weight.
For further details see the description in Stud.IP and feel free to contact me if you would like to give a talk.

Vorbesprechung

Tuesday, 22.10.2024 16:15 - 17:45, (HS 4).

Literatur

[1] Alina Bucur, Francesc Fité, and Kiran S. Kedlaya, *Effective Sato-Tate conjecture for abelian varieties and applications*, arXiv, 2020.

[2] Andreas-Stephan Elsenhans and Jörg Jahnel, *Frobenius trace distributions for K3 surfaces*, arXiv, 2021.

[3] Francesc Fité, *Equidistributions, L-Functions, and Sato–Tate Groups*, Contemporary Mathematics **649** (2015).

[4] Francesc Fité, Kiran S. Kedlaya, and Andrew V. Sutherland, *Sato-Tate groups of abelian threefolds: a preview of the classification*, Arithmetic, geometry, cryptography and coding theory, 2021, pp. 103–129, DOI 10.1090/conm/770/15432.

[5] Francesc Fité, Kiran S. Kedlaya, Víctor Rotger, and Andrew V. Sutherland, *Sato-Tate distributions and Galois endomorphism modules in genus 2*, Compos. Math. **148** (2012), no. 5, 1390–1442, DOI 10.1112/S0010437X12000279.

[6] Marc Hindry and Joseph H. Silverman, *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction.

[7] Kevin James, *Variants of the Sato-Tate and Lang-Trotter conjectures*, Frobenius distributions: Lang-Trotter and Sato-Tate conjectures, 2016, pp. 175–184, DOI 10.1090/conm/663/13354.

[8] Elisa Lorenzo García, *On the Sato-Tate conjecture*, 2015.

[9] David Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay by Oxford University Press, London, 1970.

[10] Jean-Pierre Serre, *Abelian ℓ-adic representation and elliptic curves*, 1968.

[11] ———, *Lectures on $N_X(p)$*, Vol. 11, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.

[12] Andrew V. Sutherland, *Sato-Tate distributions*, Analytic methods in arithmetic geometry, 2019, pp. 197–248, DOI 10.1090/conm/740/14904.

[13] Anthony Várilly-Alvarado, *Arithmetic of K3 surfaces*, Geometry over nonclosed fields, 2017, pp. 197–248.

[14] David Zywina, *Determining monodromy groups of abelian varieties*, arXiv, 2020.

1.5.8 Higher Structure Oberseminar

Dozent/Art: Chenchang Zhu/ Oberseminar

Zielgruppe/Sprache: Master/Doctoral students / English

Vorkenntnisse: Lie groupoids, Lie algebroids, Poisson/symplectic manifolds, simplicial manifolds

Termin: Wednesday, 10:15–11:45

Beschreibung

We will have guests or some ph.d. students or postdocs giving talks in higher structures in geometry.

1.5.9 Topics in Poisson geometry Oberseminar

Dozent/Art: Chenchang Zhu/ Oberseminar

Zielgruppe/Sprache: Master/Doctoral students / English

Vorkenntnisse: Lie groupoids, Lie algebroids, Poisson/symplectic manifolds, simplicial manifolds

Termin: Wednesday, 14:15–15:45

Beschreibung

We will discuss further application in Poisson geometry of higher structure tools

1.5.10 Oberseminar Analysis of Partial Differential Equations

Dozent/Art: Ingo Witt / Oberseminar

Zielgruppe/Sprache: Master and doctoral students / English

Vorkenntnisse: Pseudodifferential operators, microlocal analysis, basic symplectic geometry.

Beschreibung

In this seminar, we will study **Fourier integral operators** (FIOs) **with complex phase**. At the same time, we will also learn about **Maslov's canonical operator**.
The basic structure to be studied are oscillatory integrals of the form

$$u(x) = \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)\, d\theta,$$

where φ is a phase function and a belongs to a suitable class of amplitude functions. In addition, the condition $\Im\varphi \geq 0$ is imposed for the method of stationary phase to be applicable. Then $u \in I^m(X;\Lambda)$ is a Lagrangian distribution associated with a Lagrangian manifold Λ parametrized by the phase function φ. FIOs are linear operators acting between sections of vector bundles whose distributional kernels are Lagrangian distributions.
FIOs and the canonical operator are two sides of the same coin. As we will see, both concepts have their strengths and weaknesses.
It appears that FIOs with complex phase offer much greater flexibility in tackling PDE problems even when the underlying geometry is real. So, it is worth the extra effort that comes with the technical complications in the complex case.

We shall read or at least partially read the following publications:

FIOs with real phase: Hörmander [7, 8], Duistermaat–Hörmander [6], Duistermaat [5], Trèves [24].

FIOs with complex phase: Melin–Sjöstrand [19, 20], Sjöstrand [23], Hörmander [8], Mattar [18], Trèves [24].

Canonical operator: Maslov [12–15], Maslov–Fedoryuk [17], Mishchenko–Shatalov–Sternin [21], Buslaev [1], Maslov–Danilov [16], Kucherenko [9, 10].

Special chapters: Nazaikinskii–Oshmyan–Sternin–Shatalov [22], Danilov–Le [2], Dubnov–Maslov–Nazaikinskii [3, 4].

The algebraic approach: Malgrange [11].

Christian Jäh and I plan to produce *seminar notes.*

Literatur

[1] V. S. Buslaev, *The generating integral and the Maslov canonical operator in the WKB method*. Funkcional. Anal. i Priložen. **3** (1969), 17–31 (Russian).

[2] V. G. Danilov and V. A. Le, *Fourier integral operators*. Mat. Sb. (N.S.) **110(152)** (1979), 323–368, 471 (Russian).

[3] V. L. Dubnov, V. P. Maslov, and V. E. Nazaikinskii, *The complex Lagrangian germ and the canonical operator*. Russian J. Math. Phys. **3** (1995), 141–190.

[4] ———, *Corrigendum: "The complex Lagrangian germ and the canonical operator"*. Russian J. Math. Phys. **4** (1996), 271.

[5] J. J. Duistermaat, *Fourier integral operators*. Progr. Math., vol. 130, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.

[6] J. J. Duistermaat and L. Hörmander, *Fourier integral operators, II*. Acta Math. **128** (1972), 183–269.

[7] L. Hörmander, *Fourier integral operators, I*. Acta Math. **127** (1971), 79–183.

[8] ———, *The analysis of linear partial differential operators. IV. Fourier integral operators*. Grundlehren Math. Wiss., vol. 275, Springer, Berlin, 1994 (corrected reprint of the 1985 original).

[9] V. V. Kucherenko, *Parametrix for equations with degenerate symbol*. Soviet Math. Dokl. **17** (1976), 1099–1103.

[10] ———, *Asymptotic solution of the Cauchy problem for equations with complex characteristics*. J. Soviet Math. **13** (1980), 24–81.

[11] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*. Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., vol. 3, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1967.

[12] V. P. Maslov, *Perturbation theory and asymptotic methods*. Izdat. Moskov. Univ., Moscow, 1965 (Russian).

[13] ———, *The characteristics of pseudo-differential operators and difference schemes*. In: International Congress of Mathematicians (Nice, 1970). Papers of Soviet mathematicians. Nauka, Moscow, 1972, pp. 188–202 (Russian).

[14] ———, *Operational methods*. Mir, Moscow, 1976.

[15] ———, *Asymptotic methods and perturbation theory*. Nauka, Moscow, 1988 (Russian).

[16] V. P. Maslov and V. G. Danilov, *Quasi-invertibility of functions of ordered operators in the theory of pseudo-differential operators*. J. Soviet Math. **7** (1977), 695–794.

[17] V. P. Maslov and M. V. Fedoryuk, *Quasiclassical approximation for the equations of quantum mechanics*. Nauka, Moscow, 1976 (Russian).

[18] G. Mattar, *The principal symbol map for Lagrangian distributions with complex phase*. arXiv:2212.07196 [math.AP].

[19] A. Melin and J. Sjöstrand, *Fourier integral operators with complex-valued phase functions*. In: J. Chazarain (ed.), Fourier integral operators and partial differential equations. (Colloq. Internat., Univ. Nice, Nice, 1974). Lecture Notes in Math., vol. 459, Springer, Berlin, 1974, pp. 120–223.

[20] ———, *Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem*. Comm. Partial Differential Equations **1** (1976), 313–400.

[21] A. S. Mishchenko, V. E. Shatalov, and B. Yu. Sternin, *Lagrangian manifolds and the Maslov operator*. Springer Ser. Soviet Math., Springer, Berln, 1990.

[22] V. E. Nazaikinskii, V. G. Oshmyan, B. Yu. Sternin, and V. E. Shatalov, *Fourier integral operators and the canonical operator*. Uspekhi Mat. Nauk **36** (1981), 81–140 (Russian).

[23] J. Sjöstrand, *Fourier integral operators with complex phase functions*. In: L. Hörmander (ed.), Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations (Inst. Adv. Study, Princeton, NJ, 1977/78). Ann. of Math. Stud., vol. 91, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1979, pp. 51–64.

[24] F. Trèves, *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 2. Fourier integral operators*. Univ. Ser. Math., Plenum Press, New York, 1988.

1.6 Fachdidaktische Seminare im Master of Education

1.6.1 Vorbereitung auf das 4-wöchige / 5-wöchige Fachpraktikum (Module M.Mat.0046-4 und M.Mat.0046-5)

Dozent/Art: Stefan Halverscheid und Andreas Wagenblast

Zielgruppe/Sprache: Studierende im Master of Education bzw. Zugelassenen zum Vorstudium / Deutsch

Vorkenntnisse: Modul 0041

Termin: Verschiedene Seminargruppen dienstags und donnerstags

Beschreibung

Diese Veranstaltung, insbesondere die Blockverstanstaltungen, bereiten alle vor, die im Wintersemester oder Sommersemester das Fachpraktikum im Fach Mathematik im bzw. für den Master of Educaton absolvieren möchten. Eine Teilnahme an den Blockveranstaltungen ist für die Teilnahme an den Blöcken im Winter wie im Sommer wichtig, weil die möglichen Plätze mit den Praktikumsschulen jetzt abgesprochen werden müssen.
In der Veranstaltung befassen wir uns mit der Planung von Unterrichtseinheiten und Unterrichtsstunden. Dabei geht es um die Festlegung von Lernzielen und deren Überprüfung, die Organisation von Unterrichtsepisoden mit passenden Methoden.

1.6.2 Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: Funktionales Denken (Module M.Mat.0050.Sek1 und M.Mat.0051)

Dozent/Art: Stefan Halverscheid und Louisa Ebel

Zielgruppe/Sprache: Studierende im Master of Education bzw. Zugelassenen zum Vorstudium / Deutsch

Vorkenntnisse: Modul 0041

Termin: Blockveranstaltungen

Beschreibung

Diese Veranstaltung bildet den Teil zur Sekundarstufe I im Modul 0050 und kann außerdem (für diejenigen, die schon Modul 0050.Sek1 im letzten Wintersemester zur Arithmetik und Algebra absolviert haben) als Modul M.Mat.0051 in den Wahlpflichtbereich im Master of Education eingebracht werden.
Zur Vorbereitung der Seminarsitzungen gibt es vorbereitende Videos und Aufgabenzettel, zu denen dann kleinere Seminarbeiträge zur Stoffdidaktik des funktionalen Denkens in

der Sekundarstufe I, zu Unterrichtskonzepten und Lernschwierigkeiten sowie zum Einsatz digitaler Hilfsmittel wöchentlich bearbeitet werden.
Als Seminarsitzungen sind folgende Themen geplant:

1. Die Aspekte von Funktionen anhand der Geschichte der Mathematik.
2. Die Entwicklung des Funktionsbegriffs Funktionen als fundamentale Idee der Mathematik.
3. Die historische Entwicklung des Lehrens und Lernens zu funktionalem Denken
4. Muster und funktionales Denken in der Arithmetik
5. Didaktik der Bruchrechnung und proportionale Zusammenhänge
6. Affin-lineare Funktionen und die „Illusion of Linrearity"
7. Funktionales Denken in der Geometrie
8. Polynome vom Grad 2
9. Polynome vom höherem Grad und Wurzelfunktionen
10. Unterrichtsvideos zu Exponenzialfunktionen und exponentiellem Wachstum
11. Mathematisches Modellieren zu exponenziellem Wachstum, mit trigonometrische Funktionen

Kapitel 2

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik (NAM)

2.1 Grundvorlesungen

2.1.1 Numerische Mathematik I

Dozent/Art: Gerlind Plonka-Hoch / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Yannick Riebe, Anahita Riahi

Zielgruppe/Sprache: ab 3. Semester / deutsch

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen

Beschreibung

Was will numerische Mathematik? Viele Probleme der realen Welt lassen sich mathematisch formulieren und mit Hilfe des Computers lösen.

Forderung an die Lösungsverfahren

- Effizienz (Berechnung innerhalb einer problemabhängigen Zeitspanne)
- Genauigkeit (Lösung innerhalb eines gewissen Toleranzbereiches)

Aufgaben der Numerik

- Konstruktion von Verfahren zum Auffinden von Lösungen
- Analyse der Verfahren bzgl. Effizienz und Störungsanfälligkeit

Inhalt der Vorlesung
Die Vorlesung Numerische Mathematik I (Numerische Lineare Algebra) befasst sich insbesondere mit folgenden Themenkomplexen:

- Einführung
- Direkte Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen (Normen und Kondition einer Matrix, Dreiecksmatrizen, Gauß-Elimination, Pivotsuche, Cholesky-Verfahren)
- Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme (Banachscher Fixpunktsatz, Spektralradius und Konvergenz, Gauß-Seidel-Verfahren und Jacobi-Verfahren, Relaxation, CG-Verfahren)
- Orthogonalisierungsverfahren und Ausgleichsrechnung (Kleinste-Quadrate Methode, QR-Zerlegung, Singulärwertzerlegung, verallgemeinerte Inverse)
- Matrizeneigenwertprobleme (Vektoriteration, inverse Vektoriteration, QR-Verfahren, Eigenwert-Einschließungen)
- Nichtlineare Gleichungen (Konvergenzordnung und Fehlerabschätzung, Newton-Verfahren, Intervallschachtelung, Regula falsi, Sekantenmethode)

Literatur

- M. Hanke-Burgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens* (B.G. Teubner, Stuttgart, 2002).
- G. Hämmerlin, K.-H. Hoffmann, *Numerische Mathematik* (Springer, Berlin, 1989).
- T. Sauer, *Numerische Mathematik I* (Vorlesungsskript, gehalten im Wintersemester 1999/2000)
- R. Schaback, H. Wendland, *Numerische Mathematik* (Springer, 2005).
- H.R. Schwarz, *Numerische Mathematik* (B.G. Teubner Stuttgart, 1988).
- J. Stoer, *Numerische Mathematik I* (Springer, Berlin, 1999 (8. Auflage))
- J. Stoer, R. Burlisch, *Einführung in die numerische Mathematik II* (Springer, 1978)

2.1.2 Schulbezogene Angewandte Mathematik (Sammi)

Dozent/Art/: Max Wardetzky / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Tim Brüers

Zielgruppe/Sprache: Lehramt ab 3. Semester / deutsch

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen und Grundkenntnisse in Python

Beschreibung

In dieser Veranstaltung werden wir uns mit unterschiedlichsten mathematischen Problemen beschäftigen und Algorithmen entwickeln, um diese zu lösen. Den Anfang machen dabei lineare und nichtlineare Gleichungen, welche wir mithilfe von Matrixzerlegungen und dem Banachschen Fixpunktsatz analysieren werden. Danach wenden wir uns den Grundlagen der Graphentheorie zu und werden anhand dieser die Struktur von verschiedenen Graphen genauer untersuchen. Die Herleitung des Dijkstra Algorithmus und Paarungen in Graphen werden ebenfalls Thema sein. Schlussendlich beschäftigen wir uns mit der Polynominterpolation und werden diese nutzen, um Quadraturformeln zur numerischen Integration zu bestimmen.

Literatur

- Max Wardetzky, Vorlesungsskriptum

2.2 Serviceveranstaltungen

2.2.1 Mathematik für Studierende der Informatik I

Dozent/Art: Anne Wald / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Gesa Sarnighausen / Philipp Mickan

Zielgruppe/Sprache: Studierende der Informatik / deutsch

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Literatur

-

2.3 Weiterführende Vorlesungen

2.3.1 Introduction to optimisation

Dozent/Art/: Russell Luke / Vorlesung

Assistenz: Quinyu Yan, Thi Lan Dinh, Henrika Härer

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse: AGLA II, Numerk I, Intriduction to Optimization

Beschreibung

In this series of specialized courses students will learn the foundations of convex and variational analysis, as well as how to apply these concepts to problems in optimization. Concrete applica- tions that will be examined during the course of these lectures include computed tomography, optical imaging, phylogenetic analysis, molecular structure determination. Other applications of interest include machine learning, quantum control and decision making under uncertainty. After a two-week survey of the concrete application problems as motivation, we will spend the rest of the first semester acquiring the theoretical tools necessary to design and analyse algorithms for solving optimization problems in the context of these problems. Together these tools are de- scribed as finite dimensional nonsmooth analysis, or even more broadly, variational analysis. The sec- ond semester will continue with the development of theoretical foundations gradually moving toward concrete algorithms and their analysis in the context of the application problems surveyed in the first semester. The third semester will focus on stochastic algorithms for molecular structure determination, algorithms in nonlinear spaces with application to phylogenetic analysis, as well as other applications of current interest like quantum control and machine learning.

Literatur

- *Applied Variational Methods of Optimization*, D. R. Luke (2024)

2.3.2 Numerics of partial differential equations III

Dozent/Art/: Christoph Lehrenfeld / Tim Haubold / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Christoph Lehrenfeld / Tim Haubold

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse: Numerics of partial differential equations I (Numerics of partial differential equations II is also recommended) or similar courses

Beschreibung

In the third part of the lecture cycle, we will first concentrate on the discretization of flow problems with an emphasis of modern techniques to render nonconforming discretizations with structure-preserving properties efficient using the following techniques:

- Hybridization
- Operator-splitting time integration
- ...

In a second part of the lecture we will treat hyperbolic PDEs, their analysis and numerical treatment. We will concentrate on the established theory for scalar hyperbolic problems and address methods and techniques for the case of systems of hyperbolic PDEs.

Literatur

- Christoph Lehrenfeld, lecture notes
- Dmitri Kuzmin, Hennes Hajduk (Autoren), Property-preserving Numerical Schemes For Conservation Laws

2.3.3 Matrix methods in data science

Dozent/Art/: Max Pfeffer / Vorlesung mit Übung

Assistenz: Lukas Klingbiel

Zielgruppe/Sprache: Master englisch

Vorkenntnisse: Diff 1-2, AGLA 1

Beschreibung

The aim of this lecture is to introduce some methods for dealing with large data sets, as we often find in modern data science applications. In particular, the first part of the lecture will focus on different types of matrix factorization, with a special emphasis on singular value decomposition and its approximations. In the second part, we will look at unsupervised and supervised learning methods such as clustering and classification. Finally, we will look at tensors as multidimensional arrays, addressing the challenges associated with such datasets and discussing decomposition methods designed to address these issues.

Literatur

2.4 Seminare

2.4.1 Numerics and analysis of Navier-Stokes equations

Dozent/Art: Christoph Lehrenfeld / Seminar

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse: Numerics of partial differential equations I or some similar preknowledge in the analysis and/or numerics of PDEs is strongly recommended!

Beschreibung

We focus on questions of the formulation of the equations of incompressible flows and the existence, uniqueness and regularity of solutions.

Literatur

- Roger Temam, Navier-Stokes Equations – Theory and Numerical Analysis
- Volker John, Finite Element Methods for Incompressible FLow Problems

2.4.2 Seminar on SP3

Dozent/Art: D. R. Luke

Assistenz:

Zielgruppe/Sprache: English

Vorkenntnisse: Optimization, Analysis

Beschreibung

The focus of this seminar is on highly influential papers in the field of mathematical optimization. Students will choose from a selection of original papers that represent some of the highlights of mathematical optimization in the last 100 years.
Students with a basic knowledge of optimization and nonsmooth analysis will benefit the most from this seminar. Students will be expected to make a presentation about the content of the selected paper, as well as a survey of the literature that the papers spawned. Presentations must be in English.

Literatur

Literaturverzeichnis

[1] N. Aronszajn. Theory of reporoducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68:337–404, 1950.

[2] H. Attouch, J. Bolte, P. Redont, and A. Soubeyran. Proximal alternating minimization and projection methods for nonconvex problems: An approach based on the Kurdyka-Lojasiewicz inequality. *Mathematics of Operations Research*, 35(2):438–457, 2010.

[3] J. B. Baillon, R. E. Bruck, and S. Reich. On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings and semigroups in Banach spaces. *Houston J. Math.*, 4(1):1–9, 1978.

[4] S Banach. Sur les opŕations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fund. Math.*, 3:133–181, 1922.

[5] J. Barzilai and J. M. Borwein. Two-point step size gradient methods. *IMA J. Numer. Anal.*, 8(1):141–148, 1988.

[6] A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2(1):183–202, 2009.

[7] J. Bolte, A. Daniilidis, and A. Lewis. The łojasiewicz inequality for nonsmooth subanalytic functions with applications to subgradient dynamical systems. *SIAM J. Optim.*, 17:1205–1223, 2006.

[8] J. Bolte, A. Daniilidis, O. Ley, and L. Mazet. Characterizations of Łojasiewicz inequalities: subgradient flows, talweg, convexity. *Trans. Am. Math. Soc.*, 362(6):3319–3363, 2010.

[9] L. M. Bregman. The relaxation method for finding common points of convex sets and its application to the solution of convex programming. *USSR Comp. Math. and Math. Phys.*, 7:200–217, 1967.

[10] F. E. Browder. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 54:1041–1044, 1965.

[11] F. E. Browder. Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces. *Math. Z.*, 100:201–225, 1967.

[12] C. G. Broyden. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of Computation*, 19(92):577–593, 1965.

[13] R. E. Bruck. Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces. *Pacific J. Math.*, 47:341–355, 1973.

[14] J. V. Burke and M. C. Ferris. Weak sharp minima in mathematical programming. *SIAM J. Control. Optim.*, 31:1340–1359, 1993.

[15] R. H. Byrd, J. Nocedal, and R. B. Schnabel. Representations of quasi-Newton matrices and their use in limited memory methods. *Math. Program.*, 63:129–156, 1994.

[16] E. Candès and T. Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Trans. Inform. Theor*, 51(12):4203–4215, December 2005.

[17] Y. Censor and T. Elfving. A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space. *Numer. Algorithms*, 8(2-4):221–239, 1994.

[18] A. Chambolle and T. Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *J. Math. Imaging and Vision*, 40:120–145, 2011.

[19] W. Cheney and A. A. Goldstein. Proximity maps for convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10(3):448–450, 1959.

[20] F. H. Clarke. Generalized gradients and applications. *Trans. Am. Math. Soc.*, 205:247–262, 1975.

[21] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Comm. Pure Appl. Math.*, 57:1413–1457, 2004.

[22] J. Douglas Jr. and H. H. Rachford Jr. On the numerical solution of heat conduction problems in two or three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82:421–439, 1956.

[23] J. Eckstein and D. P. Bertsekas. On the Douglas–Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators. *Math. Program.*, 55:293–318, 1992.

[24] I. Ekeland. On the variational principle. *J. Math. Anal. Appl.*, 47:324–353, 1974.

[25] H. Federer. Curvature measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93:418–491, 1959.

[26] W. Fenchel. On conjugate convex functions. *Canadian J. Math.*, 1:73–77, 1949.

[27] L. Gubin, B. Polyak, and E. Raik. The method of projections for finding the common point of convex sets. *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, 7(6):1–24, 1967.

[28] J. E. Dennis Jr and J. J. Moré. Quasi-Newton methods, motivation and theory. *SIAM Rev.*, 19(1):46–89, 1977.

[29] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.

[30] M. A. Krasnoselski. Two remarks on the method of successive approximations. *Math. Nauk. (N.S.)*, 63(1):123–127, 1955. (Russian).

[31] K. Levenberg. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *The Quarterly of Applied Mathematics*, 2:164–168, 1944.

[32] P. L. Lions and B. Mercier. Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators. *SIAM J. Numer. Anal.*, 16:964–979, 1979.

[33] W. R. Mann. Mean value methods in iterations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4:506–510, 1953.

[34] D. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, 11:431–441, 1963.

[35] G. J. Minty. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. *Duke. Math. J.*, 29(3):341–346, 1962.

[36] G. J. Minty. On the monotonicity of the gradient of a convex function. *Pacific J. Math.*, 14:243–247, 1965.

[37] J. J. Moreau. Proximité et dualité dans un espace Hilbertian. *Bull. de la Soc. Math. de France*, 93(3):273–299, 1965.

[38] J. Nash. Non-cooperative games. *Ann. Math. (2)*, 54:286–295, 1951.

[39] Yu. E. Nesterov. A method of solving a convex programming problem with convergence rate $0(1/k^2)$. *Sov. Math., Dokl.*, 27:372–376, 1983.

[40] Z. Opial. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:591–597, 1967.

[41] S. S. Oren and E. Spedicato. Optimal conditioning of self-scaling variable metric algorithms. *Math.Progam.*, 10:70–90, 1976.

[42] G. Pierra. Decomposition through formalization in a product space. *Math. Program.*, 28:96–115, 1984.

[43] R. A. Poliquin and R. T. Rockafellar. Prox-regular functions in variational analysis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348:1805–1838, 1996.

[44] B. T. Polyak. A general method of solving extremum problems. *Sov. Math., Dokl.*, 8:593–597, 1967.

[45] L. Qi and J. Sun. A nonsmooth version of newton's method. *Math. Program.*, 58:353–367, 1993.

[46] R. T. Rockafellar. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM J. Control. Optim.*, 14:877–898, 1976.

[47] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60:259—-268, 1992.

[48] Helmut Schaefer. Über die Methode sukzessiver Approximationen. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 59:131–140, 1957.

[49] D. F. Shanno and K. Phua. Matrix conditioning and nonlinear optimization. *Math. Program.*, 14:149–160, 1978.

[50] Paul Tseng. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM J. Control Optim.*, 38(2):431–446, 2000.

[51] J. von Neumann. *Functional Operators, Vol II. The geometry of orthogonal spaces*, volume 22 of *Ann. Math Stud.* Princeton University Press, 1950. Reprint of mimeographed lecture notes first distributed in 1933.

Kapitel 3

Institut für Mathematische Stochastik

3.1 Grundvorlesungen

3.1.1 Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Dozent/Art/: Tobias Kley / Vorlesung

Assistenz: Michel Groppe

Zielgruppe/Sprache: deutsch

Vorkenntnisse: Empfohlen wird B.Mat.0021 und B.Mat.0022

Beschreibung

Diese Vorlesung besteht aus drei Teilen:

1. Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie: Wir arbeiten auf diskreten Grundräumen (endlich oder abzählbar unendlich) und mit Zufallsvariablen, die damit auch nur abzählbar viele Werte annehmen. Die auftretenden Begriffe und Resultate sind von der Theorie her einfach und sollen das Verständnis der allgemeinen Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie erleichtern. Wir führen bereits die Axiomatik von Wahrscheinlichkeitsräumen ein, behandeln wichtige diskrete Verteilungen und erste stochastische Prozesse (Markov-Ketten).

2. Maßtheorie: Behandelt werden Maße und die Integration bezüglich Maßen auf allgemeinen Grundräumen. Dies liefert u. a. das Lebesgue-Maß und das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$, aber auch die Grundlagen für die Wahrscheinlichkeitstheorie mit allgemeinen Grundräumen und Verteilungen (der Erwartungswert wird z. B. zu einem 'Maß-Integral').

3. Wahrscheinlichkeitstheorie: Konzepte und Aussagen der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie werden mithilfe der Maßtheorie verallgemeinert auf reellwertige Zufallsvariablen mit allgemeinen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Danach betrachten wir

Ungleichungen, Konvergenzbegriffe und Wahrscheinlichkeitsgesetze für reellwertige Zufallsvariablen.

Literatur

- Ein Skript zur Vorlesung wird über StudIP zur Verfügung gestellt.

3.1.2 Schulbezogene Grundlagen der Stochastik

Dozent/Art/: Ulf Fiebig / Vorlesung

Assistenz: Gilles Mordant

Zielgruppe/Sprache: Lehramt / deutsch

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Wir besprechen diskrete Wahrscheinlichkeitsräume und die wichtigsten diskreten Verteilungen, den Umgang mit Zufallsvariablen und ihren Kennzahlen (Erwartungswert und Varianz), Ungleichungen und Gesetze der großen Zahlen zum Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten, Summen unabhängiger Zufallsvariablen, bedingte Verteilungen und Vorhersager, erzeugende Funktionen als „Fingerabdrücke“ von Verteilungen auf $\mathbb{N}_0$, den Zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace und seinen Einsatz z.B. zur Planung von Stichproben, das Arbeiten mit stetigen Verteilungen auf $\mathbb{R}$ (wie z.B. der Normalverteilung), den allgemeinen Zentralen Grenzwertsatz, die Grundlagen der beschreibenden und der schließenden Statistik, Markov-Ketten mit endlichem Zustandsraum, Verzweigungsprozesse (kurz).

Literatur

- Ein Skript wird vor dem Start der Vorlesung bei StudIP eingestellt.

  Als begleitende/ergänzende Literatur für die Vorlesung geeignet:

  - H. Dehling, B. Haupt
    “Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik”, Springer 2004
  - N. Henze
    “Stochastik für Einsteiger”, Springer 2021
  - U. Krengel
    “Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik”, Vieweg 2007

3.2 Serviceveranstaltungen

3.2.1 Diskrete Stochastik für Studierende der Informatik

Dozent/Art/: Housen Li / Vorlesung

Assistenz:

Zielgruppe/Sprache:

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Literatur

-

3.3 Weiterführende Vorlesungen

3.3.1 Statistical foundations of data science I

Dozent/Art/: Axel Munk / Vorlesung

Assistenz: Shayan Hundrieser

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Literatur

-

3.3.2 Stochastic processes I

Dozent/Art/: Anja Sturm / Vorlesung

Assistenz:

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Literatur

-

3.3.3 Multivariate and non Euclidean statistics III

Dozent/Art/: Stephan Huckemann / Vorlesung

Assistenz:

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse:

Beschreibung

- uni- and multivariate linear models (e.g. BLUEs and BLUPs, ANOVA and MANOVA, generalized likelihood ratio statistics)
- Kalman filtering
- multiple testing
- dimension reduction (e.g. principal component analysis, factor analysis, multidimensional scaling)
- resampling methods (e.g. U and V statistics, GOFTs, bootstrap)

Literatur

- Dryden, I. and Mardia, K.V. (2016). Statistical Shape Analysis, Wiley
- Mardia, K.V., J. T. Kent, and J. M. Bibby (1980). Multivariate Analysis, Academic Press
- Sengupta, D., Jammalamadaka S.R. (2003), Linear Models: An Integrated Approach, World Scientific

3.3.4 Spatial stochastics III

Dozent/Art/: Dominic Schuhmacher / Vorlesung mit Übungen

Assistenz: Leoni Wirth

Zielgruppe/Sprache: English

Previous knowledge: A good understanding of point process theory as learned in Spatial Stochastics II. Self-study of the Spatial Stochastics II lecture notes (if you have not attended the lectures) is possible, but hard.

Beschreibung

Continuation of Spatial Stochastics II. Based on a sound understanding of point processes, we study random spatial objects constructed from them. Tentative contents:

11 Spatial birth-and-death processes

12 An introduction to stochastic geometry

13 Continuum percolation

14 Random tessellations

This lecture cycle is (almost exclusively) on probability theory, not statistics/data science. Relevant statistical theory, methodology and algorithms are treated in the accompanying seminars, this semester the Seminar on Topological Data Analysis, see 3.4.1.

Literatur

- Chris Preston (1975), *Spatial birth and death processes*
- Rolf Schneider und Wolfgang Weil (2008), *Stochastic and integral geometry*
- Benedikt Jahnel und Wolfgang König (2020), *Probabilistic methods in telecommunications*
- Jesper Møller (1994), *Lectures on random Voronoi tessellations*

3.3.5 Non-life insurance

Dozent/Art/: Michael Fröhlich / Vorlesung

Assistenz:

Zielgruppe/Sprache: englisch

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Literatur

-

3.4 Seminare

3.4.1 Seminar on topological data analysis

Organizer: Dominic Schuhmacher

Target audience/language: Advanced bachelor and any master students / English

Prerequisites: Basic lectures in algebra/analysis/statistics

Organizational meeting: Oct. 22, 16:15 (first official time of the seminar)
Seminar Room 5.101 (Institut für Mathematische Stochastik, Northern Campus)

Description

Topological data analysis is a relatively young field of research that aims at describing and understanding complex spatial structures with the help of methods from (algebraic) topology and computational geometry. In connection with classical statistical theory it offers a wide range of possibilities for new problems and methods in spatial statistics.

In this seminar we follow the lecture notes
Magnus Bakke Botnan (2024), *Topological Data Analysis.*
`https://www.few.vu.nl/~botnan/lecture_notes.pdf`
using some additional material from the references below.

Previous knowledge in spatial statistics is not required, but may be helpful for motivation and discussions because some participants and the organizer come from this background.

Additional literature

- Andreas Beschorner and Rolf Bardeli (2023), *Einführung in die Topologische Datenanalyse* (currently only available in German!)
- Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal, Mariette Yvinec (2018), *Geometric and Topological Inference*
  `https://geometrica.saclay.inria.fr/team/Fred.Chazal/papers/CGLcourseNotes/main.pdf`
- Frédéric Chazal and Bertrand Michel (2021), *An Introduction to Topological Data Analysis: Fundamental and Practical Aspects for Data Scientists*
  `https://arxiv.org/pdf/1710.04019`
- Parvaneh Joharinad and Jürgen Jost (2023), *Mathematical Principles of Topological and Geometric Data Analysis*

3.4.2 Seminar on SP 4

Dozent/Art/: Stephan Huckemann

Zielgruppe/Sprache: Advanced bachelor and beginning master students / English

Vorkenntnisse:

Vorbesprechung: Oct. 8, 12:15
seminar room 5.101 (Institut für Mathematische Stochastik)

Termin : Oct. 30, 2024 – Feb 4, 2025, Tuesdays, 12:15 – 13.45,
seminar room 5.101 (Institut für Mathematische Stochastik)

Beschreibung

Foundations of statistical methods for non-Euclidean data with applications. Topics for talks:

- Fréchet means, smeariness and stickiness,
- principal nested spheres,
- distributional models on spheres,
- finite sample smeariness,
- phylogenetics: BHV, edge product (EP) and wald spaces,
- flavors of stickiness,
- testing in the presence of stickiness,
- ENDOR: experiment and drift model,
- Baysian optimization for ENDOR,
- estimation and modeling of orientation fields of fingerprints,
- synthetic fingerprint generation,
- characteristic and necessary minutiae.

Literatur

- Bazen, A. and S. Gerez (2002). Systematic methods for the computation of the directional fields and singular points of fingerprints. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on 24(7), 905–919.

- Billera, L., S. Holmes, and K. Vogtmann (2001). Geometry of the space of phylogenetic trees. Advances in Applied Mathematics 27 (4), 733–767.

- Cappelli, R., A. Erol, D. Maio, and D. Maltoni (2000). Synthetic fingerprint-image generation. In Pattern Recognition, 2000. Proceedings. 15th International Conference on, Volume 3, pp. 471–474. IEEE.

- Feng, J. and A. K. Jain (2011). Fingerprint reconstruction: from minutiae to phase. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on 33(2), 209–223.

- Garba, M. K., T. M. Nye, J. Lueg, and S. F. Huckemann (2020). Information geometry for phylogenetic trees. Journal of Mathematical Biology, accepted, arXiv preprint arXiv:2003.13004.

- Hotz, T. and S. Huckemann (2015). Intrinsic means on the circle: Uniqueness, locus and asymptotics. Annals of the Institute of Statistical Mathematics 67 (1), 177–193.

- Hotz, T., S. Huckemann, H. Le, J. S. Marron, J. Mattingly, E. Miller, J. Nolen, M. Owen, V. Patrangenaru, and S. Skwerer (2013). Sticky central limit theorems on open books. Annals of Applied Probability 23(6), 2238–2258.

- Huckemann, S., T. Hotz, and A. Munk (2008). Global models for the orientation field of fingerprints: An approach based on quadratic differentials. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 30(9), 1507–1519.

- Huckemann, S. F. and B. Eltzner (2018). Backward nested descriptors asymptotics with inference on stem cell differentiation. The Annals of Statistics (5), 1994 – 2019.

- Huckemann, S. F. and B. Eltzner (2020a). Data analysis on nonstandard spaces. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, e1526.

- Huckemann, S. F. and B. Eltzner (2020b). Statistical methods generalizing principal component analysis to non-Euclidean spaces. In Handbook of Variational Methods for Nonlinear Geometric Data, pp. 317–388. Springer.

- Hundrieser, S., B. Eltzner, and S. Huckemann (2024). Finite sample smeariness of Fréchet means with application to climate. Electron. J. Statist. 18(2), 3274–3309.

- Imdahl, C., S. Huckemann, and C. Gottschlich (2015). Towards generating realistic synthetic fingerprint images. In Image and Signal Processing and Analysis (ISPA), 2015 9th International Symposium on, pp. 78–82. IEEE.

- Kim, J. (2000). Slicing hyperdimensional oranges: the geometry of phylogenetic estimation. Molecular phylogenetics and evolution 17 (1), 58–75.
- Lammers, L., T. M. Nye, and S. F. Huckemann (2024). Statistics for phylogenetic trees in the presence of stickiness. arXiv 2407.03977.
- Lammers, L., D. T. Van, and S. F. Huckemann (2023). Sticky flavors. arXiv preprint arXiv:2311.08846.
- Larkin, K. G. and P. A. Fletcher (2007). A coherent framework for fingerprint analysis: are fingerprints holograms? Optics Express 15(14), 8667–8677.
- Lueg, J., M. K. Garba, T. M. Nye, and S. F. Huckemann (2022). Foundations of wald space for statistics of phylogenetic trees. arXiv 2209.05332.
- Mardia, K. V. and P. E. Jupp (2000). Directional Statistics. New York: Wiley.
- Mardia, K. V., J. T. Kent, and J. M. Bibby (1980). Multivariate Analysis. Academic press.
- Moulton, V. and M. Steel (2004). Peeling phylogenetic 'oranges'. Advances in Applied Mathematics 33(4), 710–727.
- Pokern, Y., B. Eltzner, S. F. Huckemann, C. Beeken, J. Stubbe, I. Tkach, M. Bennati, and M. Hiller (2021). Statistical analysis of endor spectra. Proceedings of the National Academy of Sciences 118(27).
- Wiechers, H., A. Kehl, M. Hiller, B. Eltzner, S. Huckemann, A. Meyer, I. Tkach, M. Bennati, and Y. Pokern (2023). Bayesian optimization to estimate hyperfine couplings from 19f endor spectra. Journal of Magnetic Resonance 353, 107491.
- Wieditz, J., Y. Pokern, D. Schuhmacher, and S. Huckemann (2022). Characteristic and necessary minutiae in fingerprints. Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics 71(1), 27–50.

and literature therein.

3.4.3 Seminar on SP 4

Dozent/Art/: Axel Munk / Seminar

Zielgruppe/Sprache: Advanced Bachelor and beginning Master students / English

Vorkenntnisse: Participants must have successfully attended the lecture Measure & probability theory (B.Mat.1400).

Termin : 01/11/2024 – 07/02/2025, on Fridays, 10.15 – 11.45, Seminar room 5.101 (Institut für Mathematische Stochastik)

Beschreibung

For many tasks of modern data analysis the stochastic modeling of very rare events, such as observing extremely low/high values or a value larger/smaller than any of the previously observed values, is important in many applications. For example, consider modeling and predicting the height of tidal waves in the planning phase of building a dam, determining future claim heights when developing policies how much money insurance companies have to set aside, prediction of records in sports, or modeling the oldest age or largest body height of people from a specific population.
For all of these questions the statistical behavior, in particular the distribution, of the maximum $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ of a sample $X_1, \ldots, X_n$ is to be considered.
In contrast, Central Limit Theorems (CLTs) allow us to approximate the distribution of "average" type statistics that are (related to) the sum $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ obtained from a random sample. More precisely, under assumptions, we then have that $P((S_n - \mu_n)/\sigma_n \leq x) \to \Phi(x)$, as $n \to \infty$, where Φ is the c.d.f. of a standard normal variable, $\mu_n = \mathrm{E}(S_n)$ and $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(S_n)$. One of the aspects that makes CLTs so useful is that the limit is always $\Phi(x)$, independent of the specific distribution of the X_i's.
However, the behavior of extremes is substantially different. Extreme Value Theory provides asymptotic results of the form $P((M_n - a_n)/b_n \leq x) \to G(x)$ and it turns out that G is always of the form

$$G(x) = \exp\Big(-\Big[1 + \xi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)\Big]\Big),$$

a so-called generalized extreme value distribution with location, scale and shape parameters μ, σ, ξ.
In this seminar we cover the basic relevant mathematical concepts and main results of extreme value theory. Our focus will be on carefully understanding the basic principles rather than obtaining results in most generality. Topics include: extreme value distributions, Cauchy's functional equation, Fisher-Tippett-Gnedenko theorem, regular variation, max-domain of attraction, and statistics for extreme value distributions. Finally, we discuss some applications and statistical estimation techniques for generalized extreme value distributions. This seminar complements the lecture Foundations of Statistical Data Science I (B.Mat.3147) by Prof. A. Munk.

Application

To provide participants with the material to be presented at an early stage, we ask you to preregister for this seminar. To this end, please email Anja Rentzsch (anja.rentzsch@uni-goettingen.de) and indicate your interest to give a seminar talk. Please include information about relevant courses you have taken in your email. Deadline for preregistration is 30 August 2024 (12pm/noon).
A preparatory virtual meeting, during which topics will be assigned to participating students, is scheduled for 2 September 2024 (2pm–3pm). Notably, the seminar is limited to 14 participants. Should preregistrations exceed 14, then participants will be chosen based on the information provided in their preregistration email.

Literatur

Topics for presentations will be assigned along the lines of:

- Z. Kabluchko: Lecture Notes "Extremwerttheorie". Available for download via `https://www.uni-muenster.de/Stochastik/kabluchko/Skripte/Skript_Extremwerttheorie.pdf`

References for further reading:

- P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.
- S. Resnick. Extreme Values, Regular Variation and Point Processes.
- L. de Haan, A. Ferreira. Extreme Value Theory: An Introduction.
- S. Resnick. Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling.
- M. Falk, J. Hüsler, R.-D. Reiss. Laws of Small Numbers: Extremes and Rare Events.
- J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Segers, J. Teugels. Statistics of Extremes: Theory and Applications.

3.5 Praktika

3.5.1 Stochastic Lab Course 2

Lecturer/Type/: Tobias Kley / Compact course, takes place in a two week period during February 2025 or March 2025

Language: english

Prerequisites: It is assumed that participants have basic knowledge in stochastics, which is usually the case after attending at least one lecture in stochastics (probability theory and/or statistics). Previous familiarity with R is very helpful, but the Stochastic Lab Course I is not required.

Description

This course is mostly learning by doing, with help available whenever needed. On each of the ten days, there is a short introductory lecture (approx. 1-1.5h) into an applied problem in stochastics. The problems cover diverse fields including applied probability and statistics. The lecture describes the problem, treats some basic theory and gives hints to get you started on the solution. Lecturer and tutor are available for general questions on problems and principles. In the afternoons, students work in groups and the tutor provides help on individual questions, on request. The students write a detailed report on their solutions.

Assessment

In order to obtain credits for this course, students are required to submit a detailed lab report on all the problems. The written report is the basis for summative assessment. Further, there will be a short oral examination where you will be asked questions about the material covered in the lectures.

Literature

- Lecture Notes will be distributed via StudIP.

Kapitel 4

Sonstiges

4.1 Schlüsselkompetenzen

4.1.1 Einführung in Python

Dozent/Art/:

Zielgruppe/Sprache:

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Literatur

-

4.1.2 How to write mathematics

Dozent/Art/: Jörg Brüdern

Zielgruppe/Sprache:

Vorkenntnisse:

Beschreibung

Literatur

-

4.1.3 Intorduction to LaTeX and TeX

Dozent/Art/: Clément Cren / Blockkurs

Zielgruppe/Sprache: Studierende aller Semester / englisch

Vorkenntnisse: Keine

Beschreibung

Most of all mathematical texts are written in LaTeX. In this course you will learn how this is done.

Literatur

•