Vorlesungskommentar – Sommersemster 24 – Wird ständig aktualisiert

Mathematisches Institut, Institut für Mathematische Stochastik,
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Georg-August-Universität Göttingen

9. April 2024

Einleitung

Der Kommentar gibt einen Überblick über die Veranstaltungen des Mathematischen Instituts (MI), des Instituts fuer Mathematische Sochastik (IMS) und des Instituts für numerische und angewandet Mathematik (NAM) im Sommersemester 24. Änderungen sind noch möglich und werden zeitnah eingepflegt. Bitte im Zweifelsfall die Daten aus **Stud.IP**, **Exa** und den ganzen Ordnungen (`https://www.math.uni-goettingen.de/service/ordnungen.html`) beachten oder auch einfach beim entsprechenden Lehrpersonal nachfragen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mathematisches Institut

1.1 Grundvorlesungen

Hinweis: Die Vorlesungen *Lehramt* richten sich an die Studierenden im Lehramt, 2FBSc und WiPäd.

1.1.1 Vorlesung: Differenzial- und Integralrechnung II

Dozent/Art/Credits: Victor Pidstrygach – Vorlesung mit Übung – 9 C

Assistenz: Greg Weiler

Vorlesungen: Mo, Do, 10–12, Präsenz, Maximum

Übungen: Mittwoch, 8–10, 10–12, 12–14

Zusätzlich: Saalübung Di. 8–10 und Tutorium Mi. 14–18

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Zielgruppe/Sprache: Zweites Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: Diff I/Agla I

Literatur

- W. Rudin: Analysis. Oldenbourg, München, 2005.

  Englisches Original: Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill, New-York, 1987.

  (Eine klare, elegante und fokusierte Darstellung.)

- K. Königsberger: Analysis I. Springer, Berlin/Heidelberg, 2004.

- T. Tao: Analysis I. Springer, Fourth edition, 2022.

  (Viele Details über die Grundlagen der Zahlen. An vielen Stellen unterschiedliche Herangehensweise als in den meisten anderen Texten.)

- B. Gelbaum, J. Olmsted: Counterexamples in Analysis. Holden-Day , San Francisco, 1964. (Nachdruck: Dover, Mineola, 2003).

  (Enthält Gegenbeispiele aus allen Gebieten der Analysis.)

1.1.2 Vorlesung: Analytische Geometrie und Lineare Algebra II

Dozent/Art/Credits: Federico Vigolo – Vorlesung mit Übung – 9 C

Assistenz: Florian Wilsch

Vorlesungen: Di, Fr, 10–12, Präsenz, Maximum

Übungen: Do, 14–16, 16–18, Fr, 8–10, 12–14

Zusätzlich: Saalübung Do 8-10 und Tutorium Fr 14-18.

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Zielgruppe/Sprache: Zweites Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: Agla I

Beschreibung

Folgenden Themen werden behandelt:

- Bilinearformen und Skalarprodukte;
- Weitere algebraische Strukturen (Gruppen, Quotienten, Dualräume. . .);
- Grundlage der affinen und projektiven Geometrie.

Literatur

Vorlesungskript wird wöchentlich veroffentlicht. Die Vorlesungen folgen die Büchern:

- Fischer, *Lineare Algebra*, Springer
- Fischer, *Analytische Geometrie*, Springer.

1.1.3 Vorlesung: Methoden der Analysis (Analysis II für Lehramt)

Dozent/Art/Credits: Stefan Halverscheid – Vorlesung mit Übung – 9 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Termin: Vorlesung Mo. 10–12 und Do. 10–12

Zusätzlich: Tutorium Di. 13–14 und Mi. 14–16.

Gemeinsame Saalübung Diff2LA-Geometrie: Do. 8–10

Übungen: Di. 14–16, Mi. 10–12 und 12–14

Assistenz: Roberta Iseppi

Zielgruppe/Sprache: Lehramt ab zweites Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: Diff I/Agla I

Beschreibung

Die Vorlesung setzt die Vorlesung Diff I des Wintersemesters fort. Wir behandeln die Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, die klassischen Integralsätze und streifen gewöhnliche Differentialgleichungen.

Literatur

Skript wird wöchentlich ergänzt

1.1.4 Vorlesung: Geometrie (für Lehramt)

Dozent/Art/Credits: Stefan Wiedmann – Vorlesung mit Übung – 6 C

Art: Präsenz, Aufzeichung der Vorlesung später verfügbar (ohne Gewähr)

Assistenz: Mahya Mehrabdollahei

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Termin: Wöchentlich Di 10–12

Zusätzlich: Einführung Geogebra Di 8–10 (voraussichtlich nur 2. und 3. Woche)

Tutorium: Fr 10–12 im Übungssaal

Übungen: Do 12–14, 14–16, Fr. 8–10 (Anne Prepeneit)

Gemeinsame Saalübung Diff2LA-Geometrie: Do 8–10

Zielgruppe/Sprache: Lehramt ab zweites Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: AGLA I

Beschreibung

Die Vorlesung setzt die Vorlesung Agla I fort. Wir behandeln axiomatische Geometrie, Geometrie in Ebene und Raum, Kegelschnitte, quadratische Formen und Bilinearformen. Ebenfalls untersuchen wir Untergruppen der Matrixgruppe GL(n), insbesondere orthogonale und unitäre Gruppe. Im letzten Teil der Vorlesung betrachten wir die Geometrie des projektiven Raumes.
Hergestellt wird jeweils der Bezug zur *Schulmathematik* durch Aufgaben aus Schulbüchern. Außerdem visualisieren wir Sachverhalte durch den Einsatz des Programms *Geogebra*.

Literatur

Skript wird wöchentlich ergänzt.

1.2 Export

1.2.1 Vorlesung: Mathematik für Stud. der Physik II (MaPhy II)

Dozent/Art/Credits: Dorothea Bahns – Vorlesung mit Übung – 12 C

Assistenz: Roberta Iseppi

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Vorlesungen: Mo, Mi, Fr 10–12 HS1 und HS2 Math. Inst.

Übungen: Fr 12-14, 14-16 SR der Physik

Zusätzlich: Saalübung Di 12–14 SR 9 der Physik

Zielgruppe/Sprache: Physikstudierende im zweiten Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: MaPhy I

Beschreibung

1.3 Weiterführende Vorlesungen

1.3.1 Vorlesung: Moderne Geometrie

Dozent/Art/Credits: Frank Gounelas – Vorlesung mit Übung – 9 C

Assistenz: Anghel-Stan

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Termin: Di, Fr, 12–14 HS 1

Übungen: Do 12-14, 16-18

Zielgruppe: BSc, 4. Semester

Vorkenntnisse: Algebra und Vorlesungen des 1. Studienjahrs

Sprache: Deutsch

Beschreibung

Diese Vorlesung wird eine Einführung in die kommutative Algebra sein, die die geometrischen Aspekte der Theorie betont. Insbesondere werden wir das Spektrum eines Rings und die Zariski-Topologie auf ihm einführen und die wichtigsten Sätze der kommutativen Algebra entwickeln, indem wir sie geometrisch interpretieren. Die Themen, die wir behandeln werden, sind:

- der Nullstellensatz und die Zariski-Topologie,
- Noethersche und Artinsche Ringe,
- Moduln, exakte Sequenzen und Tensorprodukte, Flachheit,
- Dimensionstheorie und, der Krullsche Hauptidealsatz,
- Lokalisierung und lokale Ringe,
- integrale Erweiterungen, Noether Normalizierung,
- Graduierte Moduln, die Hilbert Funktion,
- Reguläre lokale Ringe, Jacobikriterium.

Literatur

- Gregor Kemper 'A course in commutative algebra'
- Atiyah-Macdonald 'Introduction to commutative algebra'
- Siegfried Bosch 'Algebraic geometry and commutative algebra'
- Andreas Gathmann 'Commutative algebra' (Skript)

1.3.2 Lecture course: Functional analysis

Lecturer/Type/Credits: Christopher Wulff – Lecture course with exercise classes – 9 C

Assistent: Anghel-Stan

Criteria for admission to exam/exam: exercise sheets – written exam (120 minutes).

Day and time: Mondays & Thursdays 12–14 in Maximum

Exercise classes: TBA

Target audience/Language: students of mathematics, physics, computer science from fourth semester onwards – english

Preliminary knowledge: The contents of analysis I & II and linear algebra I & II

Description

Functional analysis (FA) is of fundamental importance for the analytical branch of pure mathematics, and in much of applied and numerical mathematics, e.g. in the theory and numerics of partial differential equations and integral equations, for optimization and in approximation theory, and also in many branches of stochastics.
At the same time, it plays an important role in physics, in particular in quantum mechanics. Many parts of functional analysis have been developed at the beginning of the twentieth century, to lay solid mathematical foundations for the ideas of the physicists. As a principle: quantum mechanical systems are described by a Hilbert space, measurements by application of a self-adjoint operator, and the time evolution via application of an operator which has to be inserted into a function.
FA is (after Analysis I and Analysis II) the completion of the analytical basic education of any mathematician. The subject of the course FA is the theory of normed vector spaces, in particular of Hilbert spaces, and the continuous linear maps between these.
The main source of the lecture will be Werner's book (see below), which is one of the best mathematical textbooks ever written but unfortunately only available in German. We will cover in particular:

- Normed vector spaces, functionals and operators, Hahn Banach theorems;
- Banach spaces, open mapping theorem, closed graph theorem;
- Hilbert spaces, spectral theory of normal opertors, functional calculus.

Literature

- D. Werner: Funktionalanalysis (Springer Verlag)
- M. Reed, B. Simon: Functional Analysis I, II

1.3.3 Vorlesung: Funktionentheorie

Dozent/Art/Credits: Engelbert Suchla – Vorlesung mit Übung – 9 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Termin: Di 12:15 - 13:55 und Fr 12:15 - 13:55.

Übungen: Ja; Termine stehen noch nicht fest.

Assistenz: Oscar Cosserat

Zielgruppe: Mathematik- und Physik-Studierende ab dem zweiten Semester

Sprache: Deutsch

Vorkenntnisse: Differenzial- und Integralrechnung 1

Beschreibung

Die Funktionentheorie beschäftigt sich mit Differenzial- und Integralrechnng über den komplexen Zahlen. Obwohl die Definitionen fast identisch sind, ist komplexe Differenzierbarkeit eine sehr viel stärkere Eigenschaft als reelle Differenzierbarkeit, und so ist die Theorie der holomorphen (= komplex differenzierbaren) Funktionen überraschend verschieden von der reellen Analysis.
Die Funktionentheorie bildet selbst ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik, kommt aber auch in zahlreichen anderen Gebieten zur Anwendung: Zum Beispiel ist sie ein zentrales Werkzeug für die analytische Zahlentheorie (z.B. Riemann'sche Zetafunktion) und liefert wichtige Rechenmethoden in der Physik (z.B. den Residuensatz).
Unter anderem werden folgende Themen behandelt:

- Holomorphie und die Cauchy-Riemann-Gleichungen
- komplexe Wegintegrale (die nicht vom Weg abhängen!)
- Potenzreihen und Laurentreihen
- Cauchy'sche Integralformel und Residuensatz
- Möbius-Transformationen und konforme Abbildungen
- und vieles mehr

Literatur

- Remmert & Schumacher: Funktionentheorie 1
- Freitag & Busam: Funktionentheorie 1
- Lang: Complex Analysis

1.3.4 Vorlesung: Diskrete Mathematik für Mathematical Data Science

Dozent/Art/Credits: Preda Mihăilescu – Vorlesung mit Übung – 9 C

Vorleistung/Prüfung: Klausur

Termin: Di, Fr 16–18 Maximum

Assistenz: Mieke Wessel und Stefan Wiedmann

Zusätzlich: Übung Di 10–12 HS 4

Zielgruppe/Sprache: Ab 4. Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: Pflichtvorlesungen. Elementare Zahlentheorie willkommen

Beschreibung

Die Vorlesung ist Teil des Bachelor-Programms „Mathematical Data Science“. Es ist eine Gelegenheit Kombinatorik, Zahlentheorie, Graphentheorie usw. einzuführen. Es wird ein starker Akzent auf Algorithmik gesetzt, mit Focus auf Computer Algebra und zahlentheoretischen Algorithmen die in der Kryptographie und Codierungstheorie relevant sind. Die Übungen werden durch Programmieraufgaben – vermutlich in Python – unterstützt.

Description

Es werden Themen aus der folgenden Richtungen angeschnitten.

A. Induktion, Rekursion und Erzeugende Funktionen. Arithmetische Funktionen.

B. **Elementare Arithmetik und Symbolisches Rechnen**.

   1. Elementare Konvolutionen, Langzahlarithmetik mit Karatsuba-Offman
   2. Modulare Arithmetic, Montgomerry Algorithmus für Exponentiation und Sieveking-Kung für polynomiale modulare Exponentiation.
   3. Euclid algorithmus, Kettenbrüche und Padé approximation.
   4. Schnelle multiple polynom – Evaluation and –Interpolation, schneller CRT.

B. **Fortgeschrittene Arithmetik**.

   1. Fast Fourier im Komplexen und in endlichen Ringen, Anwendungen. Schönhage - Strassen Algorithmus.
   2. Polynomiale Factorizierung: Berlekamp. Anwendung zur Faktorisierung in $\mathbb{Z}[X]$. Irreduzible Polynome über $\mathbb{F}_q[X]$.

3. Gitter, kurze Vektoren und der LLL Algorithmus.

C. **Primalität**

1. Lucas-Lehmer Tests, bedingt-deterministische Tests.
2. Probabilistische Tests: Solovay-Strassen and Rabin-Miller et.al.
3. Allgemeine deterministische oder Las Vegas tests: EECP und Cyclotomy tests, AKS.

D. **Glatte Zahlen und subexponentiale Algorithmen**

1. Die Theoreme von Dickson and Canfield, Erdös and Pomerance.
2. Quadratisches Sieb.
3. Discrete Logarithmen.

E. Eigenrecherche, moderierte Diskussion und Essayabgabe zum Thema: "KI – Versprechungen, Gefahren, Vorsichtsgebote".

Literatur

- R. Crandall and C. Pomerance : *Prime Numbers. A computational Perpsective* 2nd Edition, Springer 2005,
- J. vz Gathen and J. Gerhard: *Modern Computer Algebra*, Cambridge, 2000.
- V. Shoup: *A computationan introduction to Number theory and Algebra*
- Concrete Mathematics (Graham, Knuth, Patashnik)
- Discrete Mathematics (Rosen)

1.3.5 Vorlesung: Zahlen und Zahlentheorie

Dozent/Art/Credits: Damaris Schindler – Vorlesung mit Übung – 9 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und Vorrechnen – Klausur

Vorlesungen: Mo, Do 8–10 Maximum

Übungen: Do 12–14, 14–16

Zielgruppe/Sprache: Ab viertem Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: B.Mat.0021, B.Mat.0022.

Beschreibung

Wir werden unter anderem die folgenden Themen behandeln:

- Primfaktorzerlegung
- Euklidischer Algorithmus
- Kongruenzen, chinesischer Restsatz
- Restklassenringe, Primitivwurzeln
- Quadratreste und quadratische Reziprozitaet
- Summen von Quadraten

Literatur

- M. Hindry, Arithmetics, Springer.
- S. Müller-Stach und J. Piontkowski, Elementare und algebraische Zahlentheorie, Studium.
- K. Reiss, Basiswissen Zahlentheorie, Springer.

1.4 Fachdidaktik

1.4.1 Vorlesung: Einführung in die Mathematikdidaktik

Dozent/Art/Credits: Stefan Halverscheid – Vorlesung mit Übung – 6 C

Vorleistung/Prüfung: 50% der Hausaufgaben und zweimaliges Vorrechnen / Klausur

Termin: Vorlesung, donnerstags 8.30 bis 10.00 Uhr

Zusätzlich: Übungen (siehe unten)

- Montag 14:15 - 15:45
- Dienstag 08:15 - 09:45

Zielgruppe/Sprache: 4.-6. Semester – Deutsch

Vorkenntnisse: Empfohlen AGLA I, Diff I, Geometrie, Diff II, Stochastik, Pädagogische Psychologie

Beschreibung

Die folgenden Frage- und Problemstellungen werden betrachtet:

- Warum und wozu Mathematikunterricht?
- Wie denken Kinder?
- Mathematik – Logik und Anschauung
- Wie entwickelt sich das „mathematische Denken“?
- Gibt es unterschiedliche Denkstile in der Mathematik?
- Wie wird Mathematik dargestellt und worin besteht die besondere Leistungsfähigkeit formaler Darstellungen?
- Wie beeinflussen unterschiedliche Darstellungen das Lernen?
- Welche Rolle spielen Begriffe in der Mathematik und wie werden sie definiert?
- Wie wird mathematisch geschlossen und wie ist der Zusammenhang zwischen Begründen, Argumentieren und Beweisen?
- Welche Rolle haben Modelle in der Mathematik und welche Rolle im Wechselspiel von Mathematik und außermathematischer Realität?

Einen Wissensaufbau im Sinne des lokalen Ordnens erarbeiten wir zur elementaren Geometrie in der Ebene. Dabei wird aufbauend auf den „großen Drei“, nämlich Umfangswinkelsatz, Satzgruppe des Pythagoras und Ähnlichkeit, die Reichhaltigkeit der schulrelevanten elementaren Geometrie erlebt. Schließlich werden wir kleine Einblicke in forschungsbezogene Herangehensweisen bekommen, etwa um Bearbeitungen von Lernenden zu interpretieren, unterschiedliche Forschungsdesigns zu vergleichen oder Schulvergleichsstudien mit Aussagen zum Fach Mathematik kritisch zu lesen.

Unsere Veranstaltung knüpft an ausgewählte Inhalte der Vorlesung des Moduls B.BW.010 „Einführung in die Pädagogische Psychologie: Lehren und Lernen“ (aus den Wintersemestern 2020/2021 bzw. 2021/2022) ebenso an wie an Inhalte für statistische Methoden der Vorlesung „Schulbezogene Grundlagen der Stochastik“ (aus den Wintersemestern 2020/2021 bzw. 2021/2022), wie sie im Musterstudienplan vorgesehen sind. Wir werden jeweils auf die Stellen in diesen Veranstaltungen verweisen, sodass diese gut vorzubereiten sind, sollten die Module noch nicht absolviert worden sein.

Ablauf:
Die Vorlesung enthält Elemente der Methode des Inverted classroom. Zur Vorbereitung der Vorlesung wir ein Lernmodul mit verschiedenen Lernaktivitäten bereitgestellt. Hierzu zählen neben klassischen Vorlesungsabschnitten zum Beispiel auch eigenständige Aufgabenbearbeitungen, das Lesen von weiterführenden Texten und wissenschaftlichen Veröffentlichungen oder das Schauen anderer Lehrmaterialien. Für den elementargeometrischen Teil wird es ein Skript zur Selbstbearbeitung geben. Die Beschäftigung mit dem Lernmodul beinhaltet also neben der Vorlesung auch die Vor- und Nachbereitung. Die Vorlesungszeit selber wird verstärkt diskursiv gestaltet sein.

Für die Übungen sind die folgenden Zeiten geplant:

- Montag 14:15 - 15:45 und 16:15 - 17:45
- Dienstag 10:15 - 11:45 und 14:15 - 15:45

Sollten Sie an keinem der obigen vier Termine an einer Übung teilnehmen können, melden Sie sich bitte frühzeitig.

geplante Klausurtermine:

- 11. August 2022: 8:30 - 10:00
- wird noch angekündigt: 8:30 - 10:00

Literatur

In der Stud.IP-Veranstaltung wird Literatur zu den jeweiligen Themen zur Verfügung gestellt.

1.5 Zyklus-Vorlesungen

1.5.1 Lecture course Non-commutative geoemtry II (SP1 Z2):

Lecturer: Ralf Meyer

Lectures: Monday and Thursday 10-12 (planned).

Language: English

Audience: M.Sc. and last year B.Sc. students

Exam requirements: 50% in homework assignments, show own solutions at least twice during exercise sessions

Keywords General theory of C*-algebras, up to the Gelfand-Naimark Theorem; Hilbert modules, C*-correspondences and their Cuntz-Pimsner algebras; graph C*-algebras and C*-algebras of self-similar groups

Description

This course begins with the general theory of C*-algebras, up to the Gelfand-Naimark Theorem, which realises any C*-algebra as a C*-subalgebra of bounded operators on a Hilbert space. Then I will move on to study Hilbert modules over C*-algebras. These generalise Hilbert spaces by allowing a module over a C*-algebra instead of a vector space, equipped with a C*-algebra valued inner product. Such a Hilbert module over a C*-algebra together with a representation of the C*-algebra on it is called a C*-correspondence. This is the initial data for the construction of Cuntz-Pimsner algebras. This is an important method to define interesting C*-algebras. In particular, graph C*-algebras or C*-algebras of self-similar groups are defined in this way.
Cuntz-Pimsner algebras also figure prominently in my own research. One important aspect in my research is that C*-correspondences form a bicategory and that bicategory theory offers a useful perspective on constructions of C*-algebras such as Cuntz-Pimsner algebras. This would be a good direction for Bachelor and Master thesis under my direction. I plan, however, to focus on the analytical aspects of the Cuntz-Pimsner algebra construction, leaving the bicategorical links to individual reading or a separate class, which may be offered depending on demand and capacity.
Group representations may be studied using group C*-algebras and crossed products by group actions on C*-algebras. This links this course to the Harmonic Analysis course in the previous term. Nevertheless, students who missed the Harmonic Analysis course may still do fine in this class, except perhaps for a few lectures that focus on representation theory. I do assume knowledge of functional analysis, however.
If you consider writing a bachelor thesis with me in this direction, then please mention this to me in April or May. It makes sense to start work on it during the semester.

Literature

I will upload items (2) and (3) below in Stud.IP later because they are not easily available. They only become relevant later during the course.

1. Davidson, C*-Algebras by Example, only Chapter 1 on the general theory
2. Own lecture notes on Hilbert modules and C*-correspondences
3. Pimsner, A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz–Krieger algebras and crossed products by $\mathbf{Z}$, 1997.

1.5.2 Lecture course Differential geometry and higher structures II (SP2 Z2):

Lecturer: Chengchang Zhu

Lectures: Di, Fr 14–16

Assitance: Miquel Cueca Ten

Exerciseclasses:

Language: English.

Audience:

Exam requirements:

1.5.3 Lecture course Riemannian Geometry II (SP1 Z2):

Lecturer: Thomas Schick

Lectures: Tuesday and Friday 10-12 (planned). 6 credit points, the course will be designed as 3+1 or 2+2 (lecture/exercises)

Assitance: Henry Fischer

Language: English.

Audience: Participants of Riem. Geom. 1. The module works well for M.Sc. students, for B.Sc. students it can be used as "additional exam" or as "course not used in B.Sc.", then it can be "reactivated" in the M.Sc. studies

Exam requirements: active participation in the course (no strict formal requirements)

Modules: M.Mat.4613: Aspects of differential geometry; M.Mat.4624: Aspects of groups, geometry and dynamical systems; M.Mat.4615: Aspects of mathematical methods in physics

Description

The course is the continuation of Riemannian geometry I and will built on the latter material. Entering now is possible if the prerequisit knowledge has been obtained in a different way (course taken earlier/elsewhere, independent study,..).
The course will explore more of the relations between geometry, in particular curvature, and topology. We will learn about curvature of submanifolds. In particular, we will compare extrinsic and intrinsic curvature and learn the modern version of Gauss' "Theorema Egregium". We will also study the intrinsic Riemannian notion of volume and the relation between curvature and volume (Bishop-Gromov inequality). If time permits, we will also cover some aspects of spectral theory of the Laplace operator on a Riemannian manifold and topological consequences. Or we might venture into the concept of "convergence and degeneration" of sequences of Riemannian manifolds and how this can be used to classify and control the set of all (or many) of them.
As goal of the course, the participants will know:

- how a Riemannian metric gives rise to an intrinsic notion of volume and integraion
- how the volume is influenced by curvature (and vice versa)
- how one distinguishes intrinsic "curvedness" of a Riemannian manifold from extrinsic "being embedded in a curved way" into another manifold (and Gausses revelation that the two notions are related)
- other aspects of how the geometry influences the manifold

Literature

[1] Marcel Berger, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003. MR2002701

[2] Arthur L. Besse, *Einstein manifolds*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1987 edition. MR2371700

[3] William M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics, vol. 120, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986. MR861409

[4] Isaac Chavel, *Riemannian geometry*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. A modern introduction. MR2229062

[5] Manfredo Perdigão do Carmo, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. MR1138207

[6] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine, *Riemannian geometry*, 3rd ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR2088027

[7] Jürgen Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, 7th ed., Universitext, Springer, Cham, 2017. MR3726907

[8] John M. Lee, *Introduction to Riemannian manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer, Cham, 2018. Second edition of [MR1468735]. MR3887684

[9] Peter Petersen, *Riemannian geometry*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, Cham, 2016. MR3469435

[10] Takashi Sakai, *Riemannian geometry*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 149, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Translated from the 1992 Japanese original by the author. MR1390760

1.6 Seminare und Proseminare

1.6.1 Proseminar: Darstellungstheorie

Dozent/Art/Credits Frank Gounelas – Proseminar – 3C

Prüfung: Vortrag

Sprache: Deutsch/English

Zeit/Raum: TBD

Zielgruppe: BSc/MSc Math, Physik, Informatik.

Vorkenntnisse: AGLA I, II und elementare Gruppentheorie - z.B. wie in 'Algebra' des 3. Semesters.

Vorbesprechung TBD

Description

Die Darstellungstheorie ist im Kern die Untersuchung von Gruppen über ihren linearen Aktionen auf verschiedenen Vektorräumen, d.h. in Form von Matrizen. Zum Beispiel möchte man verstehen und klassifizieren, wie eine endliche Gruppe G (linear) auf einem Vektorraum V wirkt, indem man das Bild des induzierten Homomorphismus $G \to GL(V)$ betrachtet: Formal ist eine Darstellung einer Gruppe G über einem Körper k ein Paar (V, ρ), wobei V ein k-Vektorraum und ρ ein Homomorphismus $G \to \mathrm{GL}(V)$ ist.

Die Klassifikation der Darstellungen einer endlichen Gruppe G ist besonders gut verstanden und wird eines der Hauptziele dieses Seminars sein. Wir werden auch versuchen die Verbindung zwischen Quiver-Darstellungen, Dynkin-Diagrammen und semisimplen Lie-Algebren zu verstehen.
The proseminar talks can also be held in english, so if you feel comfortable listening to talks in German but would rather give yours in English, by all means attend!
Lernziele:

1. Weitere Analyse von endlichen Gruppen.
2. Darstellungstheorie von endlichen Gruppen.
3. Charaktertabellen und explizite Berechnungen.
4. Darstellungen von S_n und GL_n.
5. Quiver-Darstellungen, Root-Systeme, Dynkin-Diagramme.

Plan:

Wir werden hauptsächlich das Buch von Etingof et al [1] lesen, gelegentlich ergänzend aus [2–4]. Da es viele schöne (und wichtige) Aufgaben im [1] gibt, werde ich jede Woche zwei Aufgaben stellen, die idealerweise von allen Teilnehmern gelöst werden.

[1] Pavel Etingof et al, *Introduction to representation theory. With historical interludes by Slava Gerovitch*, Student Mathematical Library, 59. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. viii+228 pp.

[2] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory. A first course*, Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991. xvi+551 pp.

[3] James Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972. xii+169 pp.

[4] Jean-Pierre Serre, *Linear representations of finite groups. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. x+170 pp.

1.6.2 Proseminar: Klassische Invariantentheorie

Dozent/Art/Credits: Dorothea Bahns – Proseminar – 3C

Zielgruppe: 2. oder 3. Studienjahr BSc

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen Diff und AGLA. Algebra von Vorteil.

Vorbesprechung: TBA (online über StudIP)

Beschreibung

Mit der klassischen Invariantentheorie soll in diesem Proseminar ein klassisches Thema der Algebra beleuchtet werden, dessen Entwicklung eng mit Göttingen und insbesondere mit David Hilbert verbunden ist. Es zog eine Vielzahl von Anwendungen in Gebieten der reinen Mathematik wie auch der mathematischen Physik bis hin zur Bildverarbeitung nach sich. Computeralgebra-Systeme sind ohne diese Theorie praktisch nicht denkbar. Und tatsächlich bewies Hilbert einige seiner Sätze (Hilbertscher Basissatz, Syzygy Satz, Nullstellensatz), um Sätze der Invariantentheorie zu beweisen.

Ein oder gar **das** klassische Problem der Invariantentheorie ist schnell skizziert und sieht recht unauffällig aus (ist es aber nicht!): Gegeben ein unendlicher Körper K und ein endlich dimensionaler Vektorraum V über K. Betrachte polynomiale Funktionen $V \to K$ (was eine polynomiale Funktion ist, beschreibt man zwar mit Hilfe der Koordinaten bezüglich einer Basis von V, die Definition ist aber de facto unabhängig von der Wahl der Basis). Den Ring aller polynomialen Funktionen $K[V]$ nennt man Koordinatenring. Sei nun G eine Untergruppe von $GL(V)$ (der allgemeinen linearen Gruppe von V).

Problem: Beschreibe den Ring $K[V]^G$ der unter der Wirkung von G unverändert (also *invariant*) gelassenen Elemente von $K[V]$.

Was eine Gruppenwirkung ist und was „Beschreiben" (mit Hilfe von sogenannten Erzeugern und Relationen) bedeutet, werden wir im Proseminar natürlich besprechen.

Wir werden die Monographie von Olver zugrunde legen (siehe unten). Die darin ausgeführten Beweise bedienen sich nicht nur algebraischer, sondern auch (elementarer) analytischer Werkzeuge... Damit gehen wir zwar, wie Olver selbst schreibt, hinter den Stand der heutigen, modernen Algebra zurück, obwohl diese von Emmy Noether zeitgleich bzw. wenig später wesentlich begründet und geprägt wurde – ein Vorteil dieser Herangehensweise ist jedoch, dass man mit den Methoden der Grundvorlesungen schon recht weit kommt und eine konkrete Anschauung für gewisse Anwendungen entwickelt. Zudem bleiben wir so zum Teil nah an einigen (wenn auch nicht allen!) der historischen Ideen, die zur Entwicklung der Theorie führten.

Literatur

P. Olver, Classical Invariant Theory, London Mathematical Society, Student Texts 44, Cambridge University Press, 1999.

1.6.3 Seminar: Mathematische Modellierung

Dozent/Art/Credits : Ralf Meyer/Seminar Forschungsorientiertes Lernen/3C

Zielgruppe: Master of Education Mathematik

Vorkenntnisse: Diff I/II

Vorbesprechung: 15.3. 15:00 online in `https://meet.gwdg.de/b/ral-qec-xrt`

Beschreibung

Im Schulunterricht wird seit einiger Zeit mehr Wert auf darauf gelegt, Mathematik auf die Wirklichkeit anzuwenden. Eine mathematische Modellierung ist jedoch ein komplexer Prozess mit mehreren Schritten, die ineinander greifen. Einzelne Teile dieses Prozesses für sich liefern kaum einen Erkenntnisgewinn. Insbesondere bringen die mathematischen Handlungen, losgelöst von der mathematischen Modellierung, kaum Einblick in das Anwendungsproblem. Viel kritisiert werden daher Pseudoanwendungen, die weder zum Verständnis der Wirklichkeit noch zum mathematischen Verständnis etwas beitragen. In diesem Seminar soll der Prozess der mathematischen Modellierung daher als Ganzes betrachtet und an einer Reihe von Beispielen eingeübt werden. Daneben bietet das Seminar auch die Gelegenheit, wichtige Konzepte aus der Differenzial- und Integralrechnung zu vertiefen. Oft möchte man qualitative Aussagen über das Verhalten der mathematischen Modelle herleiten und verwendet dabei oft mehr oder weniger tiefliegende mathematische Sätze.
Es gibt interessante mathematische Modellierungsprobleme in den verschiedensten Bereichen, ob Physik, Biologie, Verkehrsplanung oder die Preisfindung in der Wirtschaft. In diesem Seminar werde ich mich auf biologische Probleme konzentrieren. Eine Rechtfertigung hierfür ist der Wunsch, mit dem Seminar auch einen kleinen Beitrag zum Nachhaltigkeitsziel der Biodiversität zu leisten. Einige überraschende Vorgänge in komplexen Ökosystemen lassen sich auch schon in einfachen mathematischen Modellen beobachten. Mit Hilfe dieser Modelle kann man die Vorgänge in Ökosystemen daher besser verstehen und erklären. Ein typisches Beispiel hierfür ist das Umkippen von Gewässern. Wird zu viel Phosphat in ein Gewässer eingeleitet, so kippt es um in einen lebensfeindlichen Zustand. Danach erholt es sich erst wieder, wenn die Phosphateinleitung unter eine andere Schwelle gesenkt wird, die deutlich niedriger ist als die Schwelle, ab der das Gewässer umkippt.
Die Wirklichkeit ist so komplex, dass „exakte“ mathematische Modelle weder möglich noch nützlich sind. Denn je genauer ein Modell, desto mehr Parameter braucht es für die Beschreibung. All diese Parameter müssen aus den vorhandenen Daten geschätzt werden, aber die Auswirkungen dieser Schätzungen auf die Vorhersagen des Modells werden mit der Komplexität des Modells immer undurchsichtiger. Für bestimmte Probleme wie zum Beispiel die Wettervorhersage braucht es natürlich sehr komplexe Modelle. Wir werden uns im Seminar allerdings auf einfachere Modelle beschränken, deren Ziel das Verständnis naturwissenschaftlicher Phänomene ist. Solche Modelle enthalten eigentlich immer vereinfachende Annahmen, die offensichtlich falsch sind. Zum Beispiel werden Populationsgrößen

in vielen Modellen als reelle Zahlen angesehen, die bestimmten Differenzialgleichungen genügen sollen – obwohl Populationsgrößen offensichtlich ganzzahlig sind. Darum verdient auch die Übersetzung von der Wirklichkeit zum Mathematischen Modell und zurück besondere Beachtung. Diese Schritte sind auch konzeptionell schwieriger als die Lösung der mathematischen Probleme, die ein Modell stellt, weil sie sowohl mathematisches als auch fachwissenschaftliches Verständnis benötigen.
Die mathematische Modellierung bietet auch die Gelegenheit, unter Computereinsatz mit Daten zu experimentieren. Man kann das mathematische Modell programmieren und danach ausprobieren, wie es sich verhält, wenn man Anfangswerte und Parameter verändert. Solche Simulationen sind eine verbreitete Methode in den Naturwissenschaften, so dass es sich lohnt, wenn dies auch im Mathematikunterricht in der Schule vorkommt. Deutlich schwieriger ist es, Modelle auch quantitativ auf reale Daten anzuwenden. Dabei müssen Parameter geschätzt, dann Vorhersagen gemacht und mit der Wirklichkeit verglichen werden. Hierbei sind jedoch verschiedene Aspekte schwierig, so dass ich in diesem Seminar darauf verzichten werde. Auf die computergestützte Modellierung möchte ich jedoch nicht verzichten. In den Vorträgen des Seminars sollten daher die folgenden diversen Aspekte jeweils vorkommen, jedoch in unterschiedlicher Gewichtung:

- Übersetzen von wirklichen Problemstellungen in mathematische, und Motivation der dabei auftretenden systematischen Modellierungsfehler;
- Mathematische Sätze beweisen;
- Qualitative Aussagen über spezifische Modelle herleiten und ihre Anwendung auf die Wirklichkeit diskutieren;
- Computerexperimente mit den mathematischen Modellen, Parameter variieren und qualitative Aussagen durch Computerexperimente überprüfen.

Der Computereinsatz ist auch deshalb für den Einsatz der Modellierung in Schulen wesentlich, weil er es erlaubt, die in der mathematischen Biologie verbreiteten Modelle mit Differenzialgleichungen durch Modelle mit Differenzengleichungen zu ersetzen. Letztere setzen keine Differenzialrechnung voraus, so dass ihr Einsatz im Unterricht nicht auf die Oberstufe beschränkt bleibt. Sie sind auch gerade in der Biologie sogar dichter an der Wirklichkeit, weil viele modellierte Größen von Natur aus diskret und nicht kontinuierlich sind.
Gemeinsam mit Sebastian Bauer habe ich ein ähnliches Seminar im Sommer 2022 angeboten. Sein Buch „Mathematisches Modellieren als fachlicher Hintergrund für die Sekundarstufe I+II“ ist auch die Hauptquelle für dieses Seminar. Eine wichtige Veränderung gegenüber dem damaligen Durchlauf betrifft Experimente mit echten Daten: Hierauf verzichte ich diesmal. So wie im damaligen Durchlauf erscheint es mir sinnvoll, nicht einzelne Vorträge zu vergeben, sondern einzelne Themenblöcke an Gruppen von 2–4 Studierende zu vergeben, die diese Themen dann gemeinsam präsentieren. Ein Themenbereich, der im Lehrbuch von Bauer nicht vorkommt, ist die Epidemiemodellierung. Diese wurde aus Anlass der

Covid-Pandemie in den letzten Jahren intensiv beforscht, und es erscheint mir weiterhin lohnend, Epidemiemodelle als Themenblock zu betrachten. Hierbei sollen die klassischen Modelle zusammen mit neueren Modellen betrachtet werden, die bestimmte Aspekte der Covid-Pandemie erhellen sollen.

Literatur

Sebastian Bauer, Mathematisches Modellieren als fachlicher Hintergrund für die Sekundarstufe I+II.

1.6.4 Seminar: An introduction to algebraic geometry: plane projective curves

Dozent/Art/Credits : Evelina Viada / Seminar / 3 C

Zielgruppe: Last Bachelor and Master students

Vorkenntnisse: Algebra, Number theory, possibly An introduction to algebraic geometry WS 2023/2024

Vorbesprechung: TBA

Timeslot: Tuesday 12:00-14:00

Description

The aim of the seminar is to learn, also by mean of exercises, the fundamental theory of projective curves in the projective plane. We will first introduce the projective space and its fundamental properties. We have already learnt, how we can classify conics in the affine plane. Now we will see how to classify them in the projective plane. Then, we will deal with curves defined by an homogeneous polynomial of degree 3 in the variables x, y, z, i.e. a projective cubic. The theory of cubics is beautiful and will lead us to the concept of elliptic curves.
We will then investigate curves of higher degree, focusing our interest in Bezout's Theorem which states that given two irreducible projective plane curves C_1 and C_2, they intersect in exactly $\deg C_1 \deg C_2$ points, if counted with multiplicity.

References

[1] William Fulton. Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry. Mathematics Lec- ture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. Notes written with the collaboration of Richard Weiss.

[2] C. G. Gibson. Elementary geometry of algebraic curves: an undergraduate introduction. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[3] Frances Kirwan. Complex algebraic curves, volume 23 of London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[4] Thomas Garrity, Richard Belshoff, Lynette Boos, RyanBrown, Carl Lienert,David Murphy, Junalyn Navarra-Madsen, Pedro Poitevin, Shawn Robinson,Brian Snyder,Caryn Werner, Algebraic Geometry: A Problem Solving Approach. AMS, Student Mathematical Library IAS/Park City Mathematics Subseries, Volume: 66; 2013;

1.6.5 Seminar on the Atiyah–Singer index theorem

Lecturer/Type/Credits: Christopher Wulff – Seminar – 3 C

Day and time: Tuesdays 14–16

Target audience/Language: Bachelor, master, phd students – english

Preliminary knowledge: Riemannian geometry, differential forms

Full announcement: `https://www.uni-math.gwdg.de/cwulff/SeminarAtiyahSinger_SS24.pdf`

Description

The Atiyah–Singer index theorem was one of the most influencial theorems from the twentieth century. It states that the analytic index of elliptic differential operators (i. e. the difference between kernel and kokernel) can be expressed in purely topological terms. It has numerous applications to geometry and topology, e. g. to the study of Riemannian metrics of positive scalar curvature.
The theorem can be proven in several different ways. In this seminar we follow the excellent textbook [1] and learn about the so called heat equation proof, which works for Dirac operators. Other proofs use cobordism theory (cf. [2]) or K-theory (cf. [3,4]).

Module signatures

B.Mat.3413: Seminar im Zyklus „Differenzialgeometrie“
B.Mat.3414: Seminar im Zyklus „Algebraische Topologie“
B.Mat.3412: Seminar im Zyklus „Analysis Partieller Differenzialgleichungen“
M.Mat.4813: Seminar on differential geometry
M.Mat.4814: Seminar on algebraic topology
M.Mat.4812: Seminar on analysis of partial differential equations

Literature

[1] John Roe: *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*
[2] R.S. Palais: *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*
[3] M. Atiyah, I. Singer: *The index of elliptic operators I*
[4] H. B. Lawson, M. L. Michelsohn: *Spin geometry*

1.6.6 Seminar: Topics in abstract harmonic analysis

Lecturer/Type/Credits: Christopher Wulff – Seminar – 3 C

Day and time: presumably Thursdays 14–16

Target audience/Language: Bachelor, master, phd students in mathematics and physics – english

Preliminary knowledge: Basic knowledge of representation theory of locally compact groups.

Full announcement: `https://www.uni-math.gwdg.de/cwulff/SeminarTopicsAbstractHarmonicAnalysis_SS24.pdf`

Description

The purpose of the seminar is to cover some more topics from representation theory of locally compact groups for which there was no more time left in lecture course non-commutative geometry I (aka abstract harmonic analysis) in the winter semester. There are different direcctions in which we could go, depending on the participants' interests, for example:

- Induced representations, imprimitivity theorem, Mackey machine (Sect. 2.6 & Chap. 6 of [1]). This is a highly interesting, but also quite comprehensive topic. If we decide to go for it, then probably there will not be a lot of time left for other things.
- Some more theory, e. g. functions of positive type (Sect. 3.3 of [6]), Pontrjagin duality (Sect. 4.3 of [6]), etc.
- Further examples that you might be interested in (suitable references to be found).
- Discussing the role of the Heisenberg group in physics, following [2].

Module signatures

B.Mat.3425: Seminar im Zyklus „Nichtkommutative Geometrie“
B.Mat.3412: Seminar im Zyklus „Analysis Partieller Differenzialgleichungen“
B.Mat.3415: Seminar im Zyklus „Mathematische Methoden der Physik“
M.Mat.4825: Seminar on non-commutative geometry
M.Mat.4812: Seminar on analysis of partial differential equations
M.Mat.4815: Seminar on mathematical methods in physics

Literature

[1] Folland: *A course in abstract harmonic analysis*
[2] Folland: *Harmonic analysis in phase space*

1.7 Oberseminare – Advanced Seminars

- Advanced seminar on analysis of partial differential equation, Witt, Fri, 14–16, SZ

  We discuss various aspects of the analysis on stratified Lie groups. This means that we have a sub-Laplacian. The Heisenberg group H_n is an important example. The overall goal is to generalize things that are known in case of H_n (like suitable pseudodifferential calculi, local dispersive estimates, etc.) to other stratified groups.

- Advanced seminar on mathematical methods in physics, Bahns, Mo, 16–18

- Advanced seminar on algebraic structures and on non-commutative geometry, Meyer, Mi, 10–12 (planned)

  This seminar is mainly an opportunity for students writing a Bachelor's or Master's thesis or dissertation under my supervision to speak about their results or articles that they are reading right now.

- Advanced seminar on analytic and algebraic number theory, Brüdern / Schindler, Mo, 16–18

- Number theory working seminar, Schindler, Time and Day TBA (this one is a seminar which aims at our PhD student and advanced master students. In contrast to the Oberseminar analytic and algebraic number theory, this one is more informal, the goal is to have here room for a reading seminar and for our PhD students and master students to present material on their ongoing work)

- Advanced seminar on topology and geometry, Schick, Di, 16–18
  This seminar is mainly an opportunity for students working towards a Bachelor's or Master's thesis or dissertation in our group to speak about their results or articles that they are reading right now. An important part will also be played by guests we plan to invite.

- Advanced seminar on algebraic number theory, Viada, Di, 14–16

- Advanced seminar on differential geometry, Pidstrygach, Do, 12–14

- Advanced seminar on higher structures, Zhu, Mi, 10–12 This seminar is an opportunity for students working towards a Bachelor's or Master's thesis or dissertation in our group to speak about their results or articles that they are reading right now. We will also invite ourside speakers.

- Advanced seminar on algebraic geometry, Gounelas, Mi, 14–16. In this seminar we cover some topics in algebraic geometry (usually 3 per semester), with allocated talks for BSc/MSci/Phd students. Various students of mine will also talk about their theses.

- Advanced seminar on stochastic processes, Sturm, Do 10-12. This seminar is mainly an opportunity for students writing a Bachelor's or Master's thesis or dissertation under my supervision to speak about their results or articles that they are reading right now.

- Masterabschlussmodul M.Edu.100, Halverscheid, Do., 12-14 Uhr. In dem Seminar werden Abschlussarbeiten aus dem Master of Education in verschiedenen Stadien der Entstehung vorgestellt. Bewährt hat sich, dass jeder mindestens drei kurze Beiträge (von ca. 15-30 Minuten) zu unterschiedlichen Zeiten in der Bearbeitungszeiten erstellt statt einer ganzen Seminarsitzung. Das gilt in ähnlicher Weise auch für Promotionsvorhaben.

1.8 Mathematische Gesellschaft und weitere Termine

- RTG 2491 lecture course; Do, 9-12, Do, 14-15, SZ
- Mathematische Gesellschaft; Do, 16:15-17:15, SZ `https://www.uni-goettingen.de/de/207450.html`
- Traditionelle Sommerwanderung: Samstag, 6.7.24

Kapitel 2

Institut für Mathematische Stochastik

2.1 Weiterführende Vorlesungen

2.2 Zyklus-Vorlesungen

2.2.1 Lecture course Spatial Stochastics II (SP4 Z2):

Lecturer: Dominic Schuhmacher

Lectures: Monday and Thursday 10-12.

Language: English

Audience: M.Sc. and last year B.Sc. students

Exam requirements: 50% in homework assignments, show own solutions at least twice during exercise sessions

Description

In this second part of the Spatial Stochastics cycle, we treat large parts of the theory of point processes more or less from scratch. Point processes are the main building block of many more complex structures in spatial stochastics, such as random graphs, random tessellations or random closed sets.
In Spatial Stochastics I, we have studied some more advanced concepts of probability theory (conditional distributions/expectations and basic stochastic process theory) and obtained an overview of elementary spatial stochastics in the form of introductory chapters on point processes on $\mathbb{R}^d$ and random fields. This semester is dedicated solely to the theory of point processes on general Borel spaces (including spaces of subsets of $\mathbb{R}^d$ and function spaces), which we build from ground up. We will first encounter similar theorems that we saw for point processes on $\mathbb{R}^d$ (the proofs in Spatial Stochastics I were done in such a way that they can be easily transferred to more general spaces) before we delve deeper into more advanced

topics. Students who have not attended Spatial Stochastics I can participate in Spatial Stochastics II without much pain. In addition to basic measure and probability theory, the main knowledge required for this course is from Chapters 2 (Conditional distributions) and 5 (Spatial point processes) in the Spatial Stochastics I lecture notes. The former might be already known from other advanced courses, the concepts of the latter will be repeated in the beginning of Spatial Stochastics II.

Highlights include:

Probability generating functionals. A tool for computing/verifying distributions of point processes.

Palm distributions. How can we mathematically describe the distribution of a point process given a point at a fixed location? How does it help us in understanding the distribution of a point process?

Gibbs processes on all of $\mathbb{R}^d$. We can reasonably specify probability densities with respect to a Poisson process distribution on a bounded set of $\mathbb{R}^d$ but not on all of $\mathbb{R}^d$. Can we still construct a point process distribution on all of $\mathbb{R}^d$ that is in a way consistent with local specifications of densities? (Answer: mostly yes.) Can we do so uniquely? (Answer: sometimes yes, sometimes no, mostly unknown.)

Convergence in distribution. Poisson process limit theorems for quite general sequences of point processes.

Literature

There are detailed lecture notes. In addition, it may be helpful to consult the following.

1. Daley and Vere-Jones (2008). An introduction to the theory of point processes II.

2. Jansen (2018). Gibbsian Point Processes. Lecture Notes.
   `https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~jansen/gibbspp.pdf`.

3. Kallenberg (2017). Random Measures, Theory and Applications.

4. Ruelle (1999). Statistical mechanics: rigorous results.

2.3 Seminare und Proseminare

2.3.1 Seminar on Stochastic Differential Equations

Description

Many dynamical processes in the real world are typically modelled as solutions to ordinary differential equations, however there comes a limit as to how accurate these models can be based off of noise in data or random fluctuations in a stochastic dynamical system. The inclusion of a stochastic term in the model may yield a more accurate and life-like model for said system. A trivial (and also fundamental) example of such a system would be the modelling of pollen particles in a solution; the random motions of the pollen particles are due to water molecules hitting the pollen. This process would later be named *Brownian motion*, a fundamental stochastic process that was studied by Einstein [2] and formalised Wiener [9]. Such ordinary differential equations with additional stochastic terms are called *Stochastic Differential Equations* (SDEs for short). Equations of these sorts were initiated by K. Itô [3] and the eponymous Itô formula established a calculus rule for processes driven by the dynamics of SDEs.
The power of SDEs is apparent from its widespread use in financial mathematics as a tool construct arbitrage-free prices for financial options and derivatives and to even model the price of stocks and interest rates. More recently, SDEs have seen an explosion in interest from the machine learning community as the popularity of diffusion models has increased. SDEs have also found fruitful application in many other diverse areas: such as sampling, MCMC, biological processes, interacting particle systems, filtering theory, and even modelling current in electric circuits.

Key Information

Time:	08/04/2024 - 08/07/2024, on Mondays 16:15-18:00
Format:	MN68, Numerical and Applied Mathematics Institute
Possible Modules:	B.Mat.3441: Seminar on applied and mathematical stochastics
	M.Mat.4841: Seminar on applied and mathematical stochastics
	B.Mat.3447: Seminar on statistical foundations of data science
	M.Mat.4847: Seminar on statistical foundations of data science
Instructors:	Dr. Alexander Lewis
Intended Audience:	**Advanced Bachelor and beginning Master students**
Language:	English

Prerequisites

Participants must have successfully attended

- Measure & probability theory (B.Mat.1400).

It is further considered helpful to have attended

- Stochastics (B.Mat.2410).

Registration

Please email Alexander Lewis (alexander.lewis@uni-goettingen.de) by the end of the day on **Thursday 21st March 2024** to pre-register for the seminar. Please indicate your interest to give a seminar talk and include information about relevant courses you have taken in your email.
A preliminary meeting, including an introduction to the seminar topic and discussion of the distribution of the presentations will be held virtually on **Friday 22nd March 2024 at 14:15 - 16:00** on Zoom. Meeting room information will be provided to registered students.
The seminar has a limited number of participants. In case of outnumbering, participants will be chosen based on the information provided in their preregistration email.
If you wish to sign up after the pre-registration date, please email me to check whether there are spots available.
If you cannot attend the meeting or if you have any further questions, please contact me directly with the above email address.

List of Presentations

This is a tentative list of presentations:

1. **Construction of the Itô Integral:** Defining the Riemann–Stieltjes integral and quadratic variation. Using these tools to construct Itô integral of simple processes by taking the left endpoint in L^2. Suggested reading: [4, Section 4.1].

2. **The Itô formula:** Deriving the Itô formula. Providing examples of the application of Itô's formula. Integration by parts and also the multidimensional version of Itô's formula. Suggested reading: [4, Section 4.6].

3. **Stochastic differential equations:** Examples of solving differential equations, such as geometric Brownian motion, Ornstein–Uhlenbeck processes, Brownian bridge. Langevin equations and stationary distributions. Suggested reading: [4, Section 5.1-5.3].

4. **Semigroups and generators of diffusion processes:** Defining diffusion semigroups as an operator. Proving the infinitesimal generator of a general diffusion process. Defining invariant distributions. Suggested reading: [7, Section 7.3] or [8, III.6] (more advanced).

5. **Solving PDEs via diffusions:** Beginning with the Kolmogorov backward equation.

Connecting the solution of PDEs to diffusions via the Feynman–Kac formula. Suggested reading: [5, Section 10.9] or [7, Section 8.1-8.2].

6. **Stochastic calculus for jump processes:** Defining jump processes such as the compensated Poisson process. Looking into the modified Itô formula for jump processes and integration. Suggested reading: [5, Section 6.5] or [4, Section 9.3-9.4].

7. **Local time:** Considering reflections of a Brownian motion on a boundary. Defining the local time and deriving the Tanaka formula. Explaining the general connection between reflections and Neumann boundary conditions. Suggested reading: [5, Section 8.6] or [1, Chapter 7].

8. **Change of measure**: Define the Radon–Nikodym derivative and apply it to a Brownian motion with drift. Prove the Cameron–Martin–Girsanov theorem for general drift. For further investigation, explore the Cameron–Martin space. Suggested reading: [7, Section 8.6] or [4, Section 10.3-10.4].

9. **Financial Markets**: Describe how stochastic processes can be used to emulate the dynamics of a stock market. Explain arbitrage and conditions on the underlying processes to avoid it. Suggested reading: [4, Section 11.1-11.3].

10. **The Black–Scholes model:** Using geometric Brownian motion to describe the dynamics of a stock's price. Solving the Black–Scholes formula to derive a rational price for a European call option. Suggested reading: [6, Section 4.1].

11. **Double Wiener-Itô Integrals**: Describe both Wiener and Itô's ideas for defining a double integral with respect to Brownian motion. Define the correct formulation via off-diagonal step functions. Suggested reading: [5, Section 9.1-9.2].

12. **Approximation of SDEs**: Defining the Euler and Milstein algorithms for the approximation of an SDE. Proving weak and mean-square convergence of the approximations to the solution of the SDE. Suggested reading: [6, Section 3.4].

Other topics may be requested if there is interest.

References

[1] Chung, K. L. and Williams, R. J. (1990). *Introduction to stochastic integration*, volume 2. Springer.

[2] Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der physik*, 4.

[3] Itô, K. (1944). 109. *Stochastic Integral*. Proceedings of the Imperial Academy, 20(8):519-524.

[4] Klebaner, F. C. (2012). *Introduction to stochastic calculus with applications*. World Scientific Publishing Company.

[5] Kuo, H.-H. (2006). *Introduction to Stochastic Integrals*. Springer.

[6] Mikosch, T. (1998). *Elementary stochastic calculus with finance in view*. World scientific.

[7] Oksendal, B. (2013). Stochastic differential equations: an introduction with applications. Springer Science & Business Media.

[8] Rogers, L. C. and Williams, D. (2000). *Diffusions, markov processes, and martingales: Volume 1, foundations*, volume 1. Cambridge university press.

[9] Wiener, N. (1938). The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897-936.

2.3.2 Seminar on Empirical Processes

Lecturer/Type/Credits: Housen Li, Axel Munk, Shayan Hundrieser – Seminar – 3 C

Day and time: Fridays 10–12

Target audience/Language: Advanced Bachelor, Master and PhD students – English

Preliminary knowledge: Basic knowledge of statistics and probability theory.

Description

Modern data do not just occur as vectors, but rather as functions or even more generally, as random objects taking values in metric spaces. Many important statistical quantities can be written as functionals of such data. A simple but fundamental example is the sample mean of real valued data, which is a simple functional (an integral) of the empirical cumulative distribution function (e.c.d.f.). After centring and rescaling, this leads to the empirical process, a stochastic process. One generic approach to studying the properties of such a statistic is to separately investigate the properties of the functional (mainly using functional analytic tools) and of the underlying empirical process. Classical Glivenko–Cantelli and Donsker theorems establish almost sure uniform and weak convergence of the empirical process, respectively. As a consequence, properties of the sample mean and also of more complex functionals of the empirical process can be derived.
The modern empirical process approach is to view the empirical process resulting from the e.c.d.f. as a process indexed in indicator functions on intervals $(-\infty, t]$ rather than scalars t. This allows remarkable generalisations to empirical processes indexed in function spaces. The developed theory provides powerful techniques that can be employed to understand the properties of modern statistical methods (e.g. bootstrap) in a broad range of scenarios. These techniques are fundamental to statistical and machine learning theory and have manifold applications nowadays, e.g. in nonparametric regression and the theory of statistical optimal transport.
In this seminar we cover the basic relevant mathematical concepts and main results of empirical process theory. Our focus will be on understanding the fundamental principles and techniques rather than obtaining results in most generality. Topics include: concentration of measure, maximal inequalities, metric entropy, Talagrand's (generic) chaining, central limit theorems for processes in (non-)separable metric spaces. As application of the theory, we consider empirical risk minimisation, optimal transport and bootstrap.

Module signatures

B.Mat.3447.Mp: Seminar im Zyklus SStatistische Grundlagen der Data Science"
M.Mat.4847.Mp: Seminar on statistical foundations of data science

Application

To provide participants with the material to be presented at an early stage, we ask you to preregister for this seminar. To this end, please email Housen Li (housen.li@mathematik.uni-goettingen.de) and indicate your interest to give a seminar talk. Please

include information about relevant courses you have taken in your email. Deadline for preregistration is 8$^{\text{th}}$ March 2024.
A preparatory meeting, during which topics will be assigned to participating students, is scheduled on 15$^{\text{th}}$ March 2024, 10:15–12:00. This meeting will be held virtually via Zoom (dialling-in information will be provided to registered students via email in due time). The seminar has a limited number of participants. In case of outnumbering, participants will be chosen based on the information provided in their preregistration email.

Literature

Topics for presentations will be assigned along the lines of

- [1] Sen, B. (2022): Lecture Notes “A Gentle Introduction to Empirical Process Theory and Applications”, `http://www.stat.columbia.edu/~bodhi/Talks/Emp-Proc-Lecture-Notes.pdf`.

References for further reading

- [2] Chernozhukov, V., Chetverikov, D., Kato, K., and Koike, Y. (2023). High-dimensional data bootstrap. Annual Review of Statistics and Its Application, 10, 427-449.
- [3] Giné, E., and Nickl, R. (2021). Mathematical Foundations of Infinite-Dimensional Statistical Models. Cambridge University Press.
- [4] Shorack, G. R. and Wellner, J. A. (2009). Empirical Processes with Applications to Statistics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [5] van der Vaart, A. W. and Wellner, J. A. (2023). Weak Convergence and Empirical Processes: With Applications to Statistics. Second Edition. Springer.
- [6] Vershynin, R. (2018). High-Dimensional Probability: An Introduction with Applications in Data Science. Cambridge University Press.

2.3.3 Seminar on Spatial Stochastics

Lecturer/Type/Credits: Dominic Schuhmacher – Seminar – 3C

Target audience: Advanced Bachelor's and beginning Master's students

Prerequisites: Measure and Probability Theory

Time and Place: Tuesday, 16-18; IMS Seminar Room 5.101

Information Meeting: 9 April, 16.30 (SR 5.101)

Description

The seminar treats theory, methodology and simple applications for statistics of spatial data based on the book

C. Gaetan and X. Guyon, Spatial Statistics and Modeling (2009), available via
`https://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/XMLPRS=N/PPN?PPN=1748978195`
when on university WLAN or logged in via VPN or via your SUB account.

The seminar is mainly intended for students who follow my lecture cycle *Spatial Stochastics* and are interested in statistical aspects of the topics covered and for students with a background in statistics who are interested in methodology for spatial data.
The three fundamental models considered in spatial statistics and in this seminar are:

(1) A random field on a continuum $S \subset \mathbb{R}^d$, i.e., a stochastic processes $(X_s)_{s \in S}$, where the X_s are spatially dependent (e.g., $X_s, X_{s'}$ have higher correlation the closer s, s' are).

(2) A random field on a finite simple graph $G = (V, E)$, i.e., a stochastic process $(X_v)_{v \in V}$, where the dependence between the X_v is described via the edge set E.

(3) A point processes, i.e., a random finite set $\{Y_1, \ldots, Y_N\} \subset \mathbb{R}^d$ of points that are spatially dependent (e.g., points excite or inhibit other points close by).

2.4 Oberseminare – Advanced Seminars

- Advanced seminar on spatial stochastics, Schuhmacher, Tue, 14–16
  Topic: Stein Meets Stats

  The last few year have seen a substantial increase of applications of Stein's method to computational statistics / machine learning / data science. Stein's method, originally devised by Charles Stein in the in the 1970s as a means of getting a nicer proof for the central limit theorem, has developed over time into a versatile method for getting approximation results for a wide range of target distributions on Euclidean and Non-Euclidean spaces. It may be seen as a collection of general recipes to bound probability distances in settings which are not easily accessible by other methods, e.g., due complicated dependence structures. In this oberseminar, we are mainly interested in recent developments that exploit ideas from Stein's method for computational statistics. The article `https://arxiv.org/abs/2105.03481` serves as a starting point.

- ...

Kapitel 3

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

3.1 Weiterführende Vorlesungen

3.2 Zyklus-Vorlesungen

3.2.1 Lecture course Numerics of PDEs II (SP3 Z2):

Lecturer: Christoph Lehrenfeld

Lectures: Tuesday and Friday 10-12 (planned).

Language: English

Audience: M.Sc. and last year B.Sc. students

Exam requirements: 50% in homework assignments, show own solutions at least twice during exercise sessions

Keywords Non-conforming finite elements, parabolic PDE, mixed problems, Stokes problem, incompressible flows, elasticity

Description

In this part of the lecture cycle we continue the investigation of numerical methods for partial differential equations. We will extend the understanding of conforming finite element methods for elliptic PDEs from part one of the lecture in several directions.
Initially, we consider singularly perturbed PDEs and different discretization approaches to deal with them. This motivates us to leave the framework of conforming discretizations and consider the use and analysis of different variational crimes.
A second component of the lecture is the consideration of parabolic PDEs and their discretization. The most important approach for discretization is the method of lines where spatial and temporal discretization are considered as independent components in the design of a discretization. We

consider the well-posedness of parabolic PDEs and their stable and accurate numerical approximation.
As a last component of the lecture cycle we consider mixed problems motivated by incompressible flows and nearly incompressible elasticity. Here, we consider the stability of weak formulations and compatibility conditions for proper discretizations.
As a guiding example where all the previously mentioned aspects are needed, we will consider incompressible fluid flow.

Literature

1. Own lecture notes

   `https://lehrenfeld.pages.gwdg.de/npde-lecture-notes/manuscript_npde.pdf`

2. D. Braess, "Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics", Cambridge University Press, 2007

3. S. Brenner, R. Scott, "The Mathematical Theory of Finite Element Methods (Texts in Applied Mathematics)", Springer, 2008

4. A. Ern, J.-L. Guermond, "Theory and Practice of Finite Elements (Applied Mathematical Sciences)", Springer, 2004

5. A. Ern, J.-L. Guermond, "Finite Elements I – III", Springer, 2022

6. D. Di Pietro, A. Ern, Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods, Springer, 2012, `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-22980-0`

3.3 Seminare und Proseminare

3.3.1 Seminar: Advanced Finite Elements

Lecturer/Type/Credits: Christoph Lehrenfeld – Seminar – 3 C

Day and time: uncertain

Target audience/Language: Bachelor, master, Phd students in mathematics and physics – english

Preliminary knowledge: Basic knowledge of Numerics of PDEs

Description

In this seminar we treat advanced topics in the field of finite element based discretization techniques. This ranges from details on more standard finite element methods over more advanced discretization techniques to advanced application fields. These notes are a preliminary draft of the topic selection and may still undergo some adaptations and additions. If you are interested in some of the topics presented below you may already inform me (via Email, `lehrenfeld@math.uni-goettingen.de` or Rocket.Chat).

- Higher order (spectral) finite element methods
  (bases, numerical integration, implementational aspects) [0 – 3 talks]
- Numerical analysis of non-coercive elliptic problem [1 talk]
- Positivity preserving finite elmeent methods [0 – 1 talks]
- Trefftz Discontinuous Galerkin methods [0 – 2 talks]
- Virtual element methods on polygonal meshes [0 – 3 talks]
- Maxwell's equations [0 – 3 talks]
- ...

Organisational notes:

Rocket.Chat channel: Additionally to the usual Stud.IP facilities we use Rocket.Chat (`chat.gwdg.de`) with the room `#ss24-advfem` for further communications (e.g. in the case of technical hick-ups, etc.).

3.4 Oberseminare – Advanced Seminars

- Advanced seminar on numercs of partial differential equations, Lehrenfeld, Wed. 8:30 – 10:00, MN55
  This seminar is mainly an opportunity for students working towards a Bachelor's or Master's thesis or dissertation in our group to speak about their results or articles that they are reading right now. An important part will also be played by guests we plan to invite.